Ast. 16 Hir.

Hirsch

Math. P.
222 d (2,1

(2.)

Fortsetzung der Sammlung

von

Beyspielen, Formeln und Aufgaben

aus der

Buchstabenrechnung

und

Algebra

von

Meier Hirsch,

Privatlehrer der Mathematik.

Erster Theil.

Berlin, 1809.

Bey Duncker und Humblot.

Sammlung
von
Aufgaben
aus der Theorie
der
algebraischen Gleichungen

von

Meier Hirsch,

Privatlehrer der Mathematik.

BAYERISCHE STAATS BIBLIOTHEK MUENCHEN

BIBLIOTHEK DER K. B. MILITAER BILDUNGS ANSTALTEN

K. B. CADETTEN CORPS BIBLIOTHEK

Erster Theil.

Berlin, 1809.

Bey Duncker und Humblot.

Im. 3431

Bayerische
Staatsbibliothek
München

[library stamp]

Vorrede.

Daß ich die allgemeine Auflösung der Gleichungen gefunden habe, werden vermuthlich meine Leser schon aus der Anzeige wissen, die ich in einige öffentliche Blätter habe einrücken lassen, weil eine Entdeckung von dieser Art nicht verschwiegen werden durfte. Eine vollständige Geschichte des vergeblichen Strebens meiner Vorgänger nach dem nämlichen Ziele könnte einem versteckten Selbstlobe ähnlich sehen; ich will daher nur das erzählen, was durchaus zur Sache gehört.

In dem zehenten Bande der Memorie di matematica e di fisica della societa italiana della scienze, P. I. (1803), gab ein ausgezeichneter Analyst, Herr Ruffini, einen Beweis der Unmöglichkeit einer sol-

chen Auflösung; ihn zu widerlegen, werden keine weitläufige Discussionen nöthig seyn. Man lese seinen Beweis, und vergleiche ihn mit meiner Auflösung, und man wird finden, daß Herr Ruffini bey der Aufzählung der möglichen Fälle an diese Art von Auflösung gar nicht gedacht habe. Herr Ruffini sucht die Gleichung für die angenommene Funktion dadurch zu erniedrigen, daß er ihr so viele gleiche Formenwerthe *) giebt, als zu seiner Absicht tauglich sind; ich thue gerade das Gegentheil; bei mir sind die angenommenen Funktionen, eine einzige Bedingung abgerechnet, immer willkührlich; alle ihre Formenwerthe können verschieden seyn, und die Erniedrigung wird dadurch hervorgebracht, daß ich sie von auflösbaren Gleichungen abhängig mache, deren Coefficienten von anderen auflösbaren Gleichungen abhängen, deren Coefficienten wieder von anderen auflösbaren Gleichungen abhängen, u. s. w. So z. B. hängt bey mir die angenommene Funktion für die Gleichung des fünften Grades ursprünglich von einer Gleichung des 120sten Grades ab; diese reducire ich zuerst auf eine zweygliedrige Gleichung des fünften Grades; ihren Coefficienten, der noch von einer Gleichung des 24sten Grades abhängt, mache ich von einer Gleichung des

---

*) Ich brauche hier, der Deutlichkeit wegen, meine Kunstausdrücke und Zeichen.

vierten Grades abhängig, deren Coefficienten nur noch von Gleichungen des sechsten Grades abhängen. Diese Gleichungen reducire ich wieder auf Gleichungen des dritten Grades, deren Coefficienten endlich nur noch von Gleichungen des zweyten Grades abhängen. Von allem diesem findet sich, die Reduktion auf die zweygliedrige Gleichung abgerechnet, in dem Beweise des Hrn. Ruffini keine Spur. Ueberhaupt hat dieser Analyst nur so viel dargethan, daß keine der ihm bekannten Methoden anwendbar sey; und in dieser Hinsicht ist in der That sein Beweis meisterhaft. Daß er geirrt habe, kann seinem wohlverdienten Ruhme nicht schaden; er zeigte seinem Nachfolger die Wege, die er meiden müsse, und leitete ihn dadurch auf die rechte Bahn.

Herr Lagrange gab im dritten Bande der neuen Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften, eine unvergleichliche Analyse der Tschirnhausenschen, Eulerschen und Bezoutschen Methoden, welche ich zum Theil, mit einigen, meinem Zwecke angemessenen, Abänderungen im sechsten Capitel aufgenommen habe. Er zeigte, daß, wenn μ eine Primzahl ist *), alle diese Methoden am Ende auf eine reducirte Glei-

*) Bey ihm ist μ das, was bey mir n ist.

chung führen, deren Coefficienten solche Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(\mu)}$, sind, welche sich nur alsdann ändern, wenn man die $\mu - 2$ letzten Wurzeln unter einander versetzt, die beyden ersten aber an ihren Stellen läßt, und daß daher diese Coefficienten sämmtlich von Gleichungen des $1.2.3 \ldots\ldots \mu - 2$ ten Grades abhängen, mithin eine Gleichung des fünften Grades von einer Gleichung des sechsten Grades. Zur Erläuterung des Vortrags nimmt er die Gleichung des fünften Grades zum Beyspiel, und zeigt, wie man es anzufangen habe, um die reducirte Gleichung wirklich darzustellen. Er bezeichnet die Wurzeln der reducirten Gleichung durch z', z'', z''', $z^{\prime r}$ z^{r}, $z^{r\prime}$, und findet die Werthe derselben *) in x', x'', x''', $x^{\prime r}$, x^{r}. Hieraus berechnet er nun den ersten Coefficienten wirklich, und sagt, daß man auf eine ähnliche Weise die übrigen Coefficienten finden könne. Am Ende fügt er hinzu: „Wir wollen uns aber in die Ausführung dieser Rechnung nicht einlassen, die, bey aller ihrer großen Weitläufigkeit, dennoch keinen Aufschluß über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade geben würde; denn da die reducirte Gleichung für z vom sechsten Grade ist, so wird sie nicht auflösbar seyn, wofern sie sich nicht auf einen niedrigern Grad als

---

*) Seite 432 und 435 der Michelsenschen Uebersetzung der Eulerschen Introduktion.

den fünften bringen läßt. Dies scheint mir aber nach der Form der Wurzeln z', z'', etc., dieser Gleichung, beinahe unmöglich.“

Aber gerade dieser Form wegen, sage ich, ist die Auflösung der reducirten Gleichung möglich. Die Funktionen z'', z''', z^{IV}, z^{V}, z^{VI}, entstehen ja aus z', wie Herr Lagrange selbst bemerkt hat, wenn man die Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, unter einander versetzt. Es lassen sich also, nach meiner Bezeichnung, die Wurzeln der reducirten Gleichung durch f: (12345), f: (12453), f: (12534), f: (12435), f: (12354), f: (12543) vorstellen; und diesen Zeichen korrespondiren nach der Ordnung, wie sie hier gesetzt worden, die Funktionen z', z^{IV}, z^{VI}, z''', z'', z^{V}. Die drey Formenwerthe f: (12345), f: (12453), f: (12534), bilden sichtbar eine cyklische Periode der drey letzten Wurzeln, und eben so die Formenwerthe f: (12435), f: (12354), f: (12543). Vereinigt man daher die drey Funktionen z', z^{IV}, z^{VI}, zu einer Gleichung des dritten Grades, so können die Coefficienten derselben neben ihrem Werthe nur noch einen haben, nämlich den, welchen die Vertauschung von x''' mit x^{IV} giebt. Es haben daher diese Coefficienten nicht mehr als zwey ungleiche Werthe, und sie hängen folglich bloß von Gleichungen des zweyten Grades ab, oder, welches das Nämliche ist, es läßt sich die reducirte Gleichung des sechsten

Grades in zwey Gleichungen des dritten Grades zerlegen, von welchen die eine die Wurzeln z', z'^{v}, $z^{v'}$, die andere die Wurzeln z''', z'', z^{v}, hat. Daß dem Scharfblicke eines Lagrange diese einfache Bemerkung entging, siehet wahrlich einem Wunder ähnlich. Nicht ich bin der Erfinder; Er ist es; er wußte es nur nicht. Ob ich wohl ohne ihn die Auflösung gefunden hätte? — Ich zweifle.

Ich komme nun zu meiner Auflösungs-Methode. Sie ist höchst einfach, gleichförmig, für alle Grade dieselbe, und übertrifft an Allgemeinheit alles, was man in dieser Hinsicht wünschen kann. Sie giebt nicht Eine Auflösung, sie giebt unendlich viele; denn die Funktion, welche ich durch φ bezeichne, ist ganz willkührlich. Zwar ist die wirkliche Berechnung äußerst mühsam, und schon bey dem sechsten Grade ohne besondere Kunstgriffe fast unausführbar. Aber diesen Schwierigkeiten des Calkuls dürfte wohl nicht leicht auf einem andern Wege auszuweichen seyn, wenn der Grad der Gleichung eine Primzahl ist. Ist er hingegen eine zusammengesetzte Zahl, so giebt es allerdings eine Methode, welche schneller zum Ziele führt; sie bleibt dem zweyten Theile vorbehalten, wo ich auch die Auflösung der Gleichungen des fünften, sechsten und siebenten Grades geben werde. Die kombinatorische Analysis kann hier vortreffliche Dienste leisten; und vielleicht

bringe ich es noch einst mit ihrer Hülfe dahin, daß die Darstellung der reducirten Gleichungen nicht viel mehr Mühe verursachen wird, als die kombinatorischen Operationen selbst.

Eine gedrängte Darstellung dessen, was dieser erste Theil enthält, dürfte hier nicht am unrechten Orte seyn. Von den symmetrischen Funktionen gehe ich aus; sie sind die Grundlage alles Uebrigen. Die Aeußerung Seite 5 in Betreff ihrer, hat sich zum Theil schon bestätigt, und die Folge wird ihr nicht widersprechen. Von ihnen handeln die beyden ersten Capitel; das erste giebt die rekurrirende Entwickelung, das zweyte die independente. Allgemeinheit war das Ziel, nach dem ich strebte. Das dritte Capitel handelt von den nicht symmetrischen Funktionen. Sie hängen sämmtlich von gewissen Gleichungen ab, die ich transformirte Gleichungen nenne. Es wird gezeigt, wie die gleichen Formenwerthe dieser Funktionen gefunden werden, wenn ihre Natur durch gewisse Merkmale gegeben ist, und wie aus den ungleichen Formenwerthen die transformirte Gleichung gebildet wird. Die häufigen Beziehungen darauf machen eine vorzügliche Beachtung nöthig. Einige Aufgaben werden erst in der Folge ihren Nutzen zeigen. Das vierte Capitel handelt von den Eliminationen. So ausführlich, wie **Bezout** in seiner Théorie générale des équations algébriques, der

es ausschließlich mit diesem Gegenstande zu thun hat, durfte ich nicht seyn; das Werk wäre zu bändereich geworden. Sollten meine Leser eine weitere Ausführung wünschen, so kann es in einem Anhange geschehen. Das fünfte Capitel hat es mit den Eigenschaften der Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ zu thun; sie zu finden, wird der folgende Theil lehren. Es wird ihr Nutzen bey dem Wegschaffen der Wurzelgrößen aus den Gleichungen, und bey der Erfindung solcher Formen von Gleichungen gezeigt, bey welchen sich die Wurzeln derselben unmittelbar darstellen lassen. Waring und Euler waren meine Führer. Die tiefen Forschungen eines Lagrange in den Memoiren der Berliner Akademie gaben den Stoff zu dem sechsten Capitel her. Hier war mir die allgemeine Auflösung der Gleichungen noch unbekannt; ich stand noch immer in dem Wahne ihrer Unmöglichkeit; daher einige Aeusserungen, die darauf hindeuten. Auf die Sache selbst hat dieser Umstand keinen Einfluß; ich würde bei einer Umarbeitung nichts davon weglassen; es ist alles zur deutlichen Einsicht des Folgenden nöthig. Dem siebenten Capitel ersuche ich meine Leser eine vorzügliche Aufmerksamkeit zu schenken; seine Wichtigkeit wird sich im zweyten Theile bey der Zerlegung der Gleichungen zeigen. Das achte Capitel endlich handelt von der allgemeinen Auflösung der Gleichungen. Was hier

davon gesagt wird, muß nur als eine Skizze angesehen werden

Mein Leser ist nicht mehr der, den ich mir in der Sammlung dachte, deren Fortsetzung ich hier liefere. Er ist in seinen Kenntnissen schon weiter vorgerückt. Die kombinatorische Analysis ist ihm nicht mehr fremd; auch hat er schon einige gute Fortschritte in der Differentialrechnung gemacht. Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, wird er, hoffe ich, aus meinem Buche Nutzen ziehen. Er wird nicht da stehen bleiben, wo ich stehen geblieben bin; er wird weiter forschen; ich führe ihn in kein unfruchtbares, aber wohl aus Mangel an Arbeitern brachliegendes Feld. Denn seitdem der Differential- und Integralkalkul die Analysten beschäftigte, wurde die Algebra wenig mehr beachtet.

Der folgende Theil wird, außer den tieferen Untersuchungen über die allgemeine Auflösung der Gleichungen, auch noch mehrere andere Materien, und darunter die wichtige, fast unerschöpfliche, von der Zerlegung der Gleichungen, enthalten. Ich werde unausgesetzt, so weit es meine Muße gestattet, daran arbeiten, um seine Erscheinung so sehr als möglich zu beschleunigen. Sollen aber alle diese Materien mit gleichem Fleiße bearbeitet seyn, so dürfte bis zu seiner Erscheinung doch noch einige Zeit verstreichen. Um indessen meine Leser auf das, was die allgemeine Auflö-

sung der Gleichungen insbesondere betrifft, nicht zu lange warten zu lassen, bin ich gesonnen, schon zur nächsten Messe eine ungefähr vier bis fünf Bogen starke Abhandlung über diesen Gegenstand herauszugeben, und darin unter andern die vollständige Auflösung der allgemeinen Gleichungen des fünften, sechsten und siebenten Grades mitzutheilen.

Berlin, im Oktober 1808.

Meier Hirsch.

Verbesserungen.

Seite 68 und Seite 69 stehet zweymal § 40. Auf das Folgende hat dieser Irrthum weiter keinen Einfluß, als daß man da, wo auf § 40 hingewiesen wird, einen oder den andern §en verstehen muß; welchen? wird man leicht erkennen.

— 85 Zeile 14 v. u. st. $(ax^{\prime} + bx^{\prime\prime})^{p}$ l. $(ax^{\prime} + bx^{\prime\prime})^{-p}$

— 91 — 3 v. oben st. efcbadgih l. ehcbadgif

— 93 — 6 v. oben st. irgend eine Complexion l. irgend eine Complexion B_x

— 99 — v. u. st. f l. f

— 103 — 9 v. oben st. dieser unbekannten Größen l. unbekannte Größen

— 111 — 11 v. u. st. jenem l. jene

— 163 — 9 v. u. ist $\mp$ etwas zu erniedrigen

— 192 — 4 v. u. st $+$ l. $\pm$

— 238 — 10 v. unten st. § 130 l. § 131.

— 256 — 9 v. u. st. ν l. γ

— 279 — 4 v. u. st. $\frac{1}{h}[\frac{\Omega^{\prime\prime}}{\prime\prime} - \frac{\Omega^{\prime}}{\Pi^{\prime}}]$ l. $\frac{1}{h}[\frac{\Omega^{\prime\prime}}{\Pi^{\prime\prime}} - \frac{\Omega^{\prime}}{\Pi^{\prime}}]$

— 304 — 2 v. u. st. A_4 l. A_1

— 331 — 5 v. u. st. $(13245)^6$ l. $(13245)^5$

— 332 — 13 von unten st. Aufl. l. Aufg.

— — — 12 v. u. st. $= E + 0$ l. $- E = 0$

— — — 10 v. u. st. Aufg. l. Aufl.

— 334 — in dem Ausdrucke von $\xi^{\prime v}$

st. $30\,(x^{\prime 2}x^{\prime\prime 2}x^{v} + x^{\prime}x^{\prime\prime 2}x^{\prime v 2} + x^{\prime\prime 2}x^{\prime v}x^{v 2})$

l. $30\left(\begin{matrix} x^{\prime 2}x^{\prime\prime 2}x^{v} + x^{\prime}x^{\prime\prime 2}x^{\prime v 2} + x^{\prime 2}x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v 2} \\ + x^{\prime\prime 2}x^{\prime v}x^{v 2} + x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime 2}x^{v 2} \end{matrix}\right)$

— 336 — 1 v. unten st. x l. x^{v}

— — — 2 v. u. st. [ı] l. [ı]

In demselben Verlage sind erschienen:

Hoffmann, C. W. D., mathematische Elementarschule; oder Anleitung zum kunstlosen Denken über mathematische Gegenstände, 8. mit Kupf. 2 rthlr.

Ide, J. J. A., Theorie der Bewegung der Weltkörper unsers Sonnensystems und ihrer elliptischen Figur. Nach de la Place frei bearbeitet mit einer Vorrede von Kästner, gr. 8. mit Kupf. 2 rthlr.

— System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper, 2 Theile mit Kupf. gr. 8. 3 rthlr.

— Anfangsgründe der reinen Mathematik, zum Leitfaden seiner Vorlesungen entworfen, 2 Theile mit Kupf. gr. 8. 1 rthlr. 12 gr.

La Croix, S. F., Anfangsgründe der Arithmetik, a. d. Franz. übers. mit Zusätzen von C. W. Hahn. gr. 8. 1 rthlr.

— Anfangsgründe der Algebra. Aus dem Franz. übers. und mit Anmerk. und Zusätzen begleitet von C. W. Hahn, 2 Theile gr. 8. 3 rthlr.

— Anfangsgründe der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Aus dem Franz. übers. von C. W. Hahn, mit K. gr. 8. 1 rthlr. 8 gr.

— Anfangsgründe der Geometrie. A. d. Franz. übers. von C. W. Hahn, gr. 8. 1 rthlr. 16 gr.

— weitere Ausführung zu seiner Geometrie. A. d. Franz. übers. von C. W. Hahn, gr. 8. m. K. 1 rthlr. 4 gr.

Meier Hirsch, Sammlung von Beyspielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, 8. 1 rthlr.

— Sammlung geometrischer Aufgaben, 2 Theile, m. K. 8. 3 rthlr. 8 gr.

Monge, Gasp., Anfangsgründe der Statik. Aus dem Franz. übers. und mit Erläuterungen versehen von C. W. Hahn, gr 8. mit Kupf. 20 gr.

Puissant, L., Sammlung verschiedener Aufgaben aus der Geometrie, aufgelöset und bewiesen durch die algebraische Analysis, als weitere Ausführung zu Lacroix's Trigonometrie. Aus dem Franz. übersetzt von C. W. Hahn, gr. 8. mit Kupf. 16 gr.

Zimmermann, C. G., Entwickelung analytischer Grundsätze für den ersten Unterricht in der Mathematik, besonders für diejenigen, welche sich ohne mündliche Anweisung belehren wollen, gr. 8. m. K. 2 rthlr.

I. Von den Wurzeln der Gleichungen, den Summen ihrer Potenzen und der Produkte dieser Potenzen, und von den symmetrischen Funktionen überhaupt.

§ 1.

In allen guten Lehrbüchern der Algebra wird gezeigt, daß der erste Theil einer Gleichung des unbestimmten nten Grades . . . . . (♆) . . . . .

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q = 0$$

jederzeit als ein Produkt von n einfachen Faktoren von der Form x — a, x — b, x — c, x — d, ꝛc. angesehen werden könne, und daß alsdann a, b, c, d, ꝛc. alle Werthe der unbekannten Größe x sind, welche die Gleichung (♆) wahr machen. Multiplicirt man diese Faktoren wirklich und vergleicht das erhaltene Produkt mit dem Polynom im ersten Theile der Gleichung, so ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. der Gleichung und ihren Wurzeln a, b, c, d, ꝛc.:

$$-A = a + b + c + d + \text{ꝛc.}$$

$$B = ab + ac + ad + bc + bd + cd + \text{ꝛc.}$$

$$-C = abc + abd + acd + bcd + \text{ꝛc.}$$

. . . .

$$\pm Q = abcd \text{ ꝛc.}$$

Es ist nämlich der erste Coefficient A mit verändertem Vorzeichen jedesmal die Summe aller Wurzeln; der zweyte Coefficient B mit Beybehaltung seines Vorzeichens die Summe aller Produkte je zweyer dieser Wurzeln; der dritte Coeffient C mit verändertem Vorzeichen die Summe aller Produkte je dreyer dieser Wurzeln; und überhaupt der unbestimmte mte Cofficient, mit demselben oder mit verändertem Vorzeichen genommen, nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, die Summe aller der Produkte, welche entstehen, wenn man die sämmtlichen Wurzeln zu m und m mit einander verbindet; das letzte Glied Q endlich (welches man auch als den Coeffienten von x^0 ansehen kann) mit demselben oder mit verändertem Zeichen genommen, nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, das bloße Produkt sämmtlicher Wurzeln.

Die Coefficienten A, B, C, D, rc. sind also nichts anders als Aggregate von Combinationen der Wurzeln a, b, c, d, rc. zu Einer, Amben, Ternen, Quaternen, rc., oder, um mich mit Hindenburg bestimmter auszudrücken, die Aggregate der Combinationen ohne Wiederholungen zur ersten, zweyten, dritten u. s. w. Classe. Wie diese Combinationen auf eine leichte Art dargestellt werden können, wird in der Combinationslehre gezeigt, die hier, wenigstens in ihren ersten Gründen, als bekannt vorausgesetzt wird.

§ 2.

Es werden in der Folge häufig gewisse Benennungen gebraucht werden, die zwar dem größern Theile meiner Leser schon bekannt seyn dürften, deren Bedeutung ich aber doch, zur Vermeidung von Irrungen und Verwechselungen, hersetzen will.

1) Funktionen nennt man, wenn von bestimmten und unbestimmten Größen die Rede ist, alle algebrai-

sche Ausdrücke, in welchen diese beiden Arten von Größen auf irgend eine Art mit einander verbunden vorkommen. Man bedienet sich alsdann der Formel: — „dieser oder jener Ausdruck sey eine Funktion von diesen oder jenen Größen" — indem man bloß die unbestimmten Größen, mit Uebergehung der bestimmten, nennt.

Des besondern Gebrauches wegen, den wir in diesem Werke von den Funktionen machen werden, will ich ein für allemal erinnern, daß hier (wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird) nur von solchen Funktionen die Rede seyn wird, die sich unmittelbar durch die sechs arithmetischen Operationen, die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzeln, bestimmen lassen, so bald die darin befindlichen Größen bekannt sind, und worin eine Größe, die als unbestimmt angesehen wird, nie als Potenzexponent, oder Wurzelindex vorkommt.

2) Eine rationale Funktion ist eine solche, in welcher entweder gar keine Wurzelgrößen vorkommen, oder in welcher sich wenigstens diejenigen Größen, die man als unbestimmt ansiehet, nicht unter den Wurzelzeichen befinden; im entgegengesetzten Falle ist die Funktion eine irrationale Funktion.

3) Eine ganze Funktion ist eine solche Funktion, in welcher entweder gar kein Nenner vorhanden ist, oder in welcher sich wenigstens diejenigen Größen, die man als unbestimmt ansiehet, nicht im Nenner befinden; im entgegengesetzten Falle heißt sie eine gebrochene Funktion.

Die Coefficienten A, B, C, ꝛc. der Gleichung (ψ) in § 1 sind demnach ganze und rationale Funktionen von den Wurzeln a, b, c, d, ꝛc., so lange man diese Größen als unbestimmt ansieht. Auf die besondere Beschaffenheit der Größen a, b, c, d, ꝛc. selbst wird hierbey keine Rücksicht genommen;

denn diese können rational oder irrational, ganz oder gebrochen seyn, und überhaupt jede beliebige Form haben, oder gar selbst wieder Funktionen von andern Größen seyn.

4) Symmetrische Funktionen sollen hier diejenigen Funktionen genannt werden, in welchen die unbestimmten Größen auf eine solche Art mit einander verbunden sind, daß unabhängig von den besondern Werthen dieser Größen, keine Aenderung in dem Werth der Funktion vorgehet, man mag diese Größen unter einander vertauschen, wie man will.

Die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. der Gleichung (♆) in § 1. sind demnach symmetrische Funktionen der Wurzeln a, b, c, d, ꝛc; sie bleiben z. B. ungeändert, wenn man a mit b, oder b mit c, oder zugleich a mit c und b mit d vertauscht, und eben so verhält es sich mit andern Vertauschungen.

Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar, daß die Summen, Reste, Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln symmetrischer Funktionen wieder symmetrische Funktionen sind, vorausgesetzt, daß die Funktionen, welche durch die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit einander verbunden werden, alle dieselben unbestimmten Größen, und zwar in derselben Anzahl enthalten. So z. B. ist der Ausdruck

$$\frac{(ab + ac + bc)^m \times abc}{\sqrt[n]{(abc - a - b - c)}}$$

eine symmetrische Funktion von a, b, c, weil ab + ac + bc, abc, a + b + c, solche Funktionen sind. Ueberhaupt ist jede Funktion von einer, oder von mehreren symmetrischen Funktionen, wenn diese dieselben unbestimmten Größen und in derselben Anzahl enthalten, immer wieder eine symmetrische Funktion.

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß jede rationale, ganze oder gebrochene symmetrische Funktion von den Wurzeln einer Gleichung, sie mag übrigens beschaffen seyn, wie sie wolle, sich immer durch die Coefficienten dieser Gleichung rational ausdrücken lasse. Diese höchst merkwürdige Relation zwischen den Coefficienten und den Wurzeln hat in der Theorie der Gleichungen mehr Licht verbreitet, als irgend eine andere; und sollte es dem menschlichen Geiste je gelingen, das Geheimniß ihrer Auflösung, in so weit diese möglich ist, völlig zu enthüllen, so dürfte es vielleicht gerade durch solche Forschungen geschehen, welche sich auf jene Eigenschaft gründen. — Wie reichhaltig die daraus gezogenen Folgerungen sind, hat Herr Lagrange durch einige in den Memoiren der Berliner Akademie eingerückte Abhandlungen gezeigt, die man auch in dem dritten Theile der Michelsenschen Uebersetzung von Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen antrifft.

§ 3.

Der größern Kürze und Deutlichkeit wegen will ich folgende Zeichen gebrauchen.

Die Summe aller Wurzeln einer Gleichung, ihrer Quadrate, ihrer Cuben, ihrer Biquadrate, und im Allgemeinen die Summe ihrer μten Potenzen, soll durch [1], [2], [3], [4] . . . . . [μ] angedeutet werden, so daß bloß die Exponenten, nicht aber die Wurzeln angegeben werden, weil die letzteren bey dem zu behandelnden Gegenstande nicht in Betrachtung kommen. Es ist also

$$[1] = a + b + c + d + e + \text{etc.}$$
$$[2] = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \text{etc.}$$
$$[3] = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + \text{etc.}$$
. . . .
$$[\mu] = a^\mu + b^\mu + c^\mu + d^\mu + e^\mu + \text{etc.}$$

Combinirt man ferner die Wurzeln a, b, c, d, ꝛc. auf alle mögliche Arten zu zwey und zwey, und erhebt in jeder solchen Verbindung wechselsweise eine Wurzel zur Potenz α, die andere zur Potenz β, so soll die Summe aller hierdurch entstandenen Produkte durch $[\alpha\beta]$ angezeigt werden. Es ist daher, wenn nur vier Wurzeln angenommen werden, also die Gleichung (ψ) in § 1 vom vierten Grade ist,

$$[\alpha\beta] = a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha + a^\alpha c^\beta + a^\beta c^\alpha + a^\alpha d^\beta + a^\beta d^\alpha + b^\alpha c^\beta + b^\beta c^\alpha + b^\alpha d^\beta + b^\beta d^\alpha + c^\alpha d^\beta + c^\beta d^\alpha.$$

Auf eine ähnliche Weise soll $[\alpha\beta\gamma]$ die Summe aller Produkte bezeichnen, welche entstehen, wenn man die sämmtlichen Wurzeln zu drey und drey verbindet, und in jeder solchen Verbindung die eine Wurzel zur Potenz α, eine andere zur Potenz β, und die dritte zur Potenz γ erhebt, und zwar auf so vielerley Arten, als es sich thun läßt. Man hat also, wenn wieder nur vier Wurzeln angenommen werden:

$$[\alpha\beta\gamma] =$$

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha b^\gamma c^\beta + a^\beta b^\alpha c^\gamma + a^\beta b^\gamma c^\alpha + a^\gamma b^\alpha c^\beta + a^\gamma b^\beta c^\alpha +$$
$$a^\alpha b^\beta d^\gamma + a^\alpha b^\gamma d^\beta + a^\beta b^\alpha d^\gamma + a^\beta b^\gamma d^\alpha + a^\gamma b^\alpha d^\beta + a^\gamma b^\beta d^\alpha +$$
$$a^\alpha c^\beta d^\gamma + a^\alpha c^\gamma d^\beta + a^\beta c^\alpha d^\gamma + a^\beta c^\gamma d^\alpha + a^\gamma c^\alpha d^\beta + a^\gamma c^\beta d^\alpha +$$
$$b^\alpha c^\beta d^\gamma + b^\alpha c^\gamma d^\beta + b^\beta c^\alpha d^\gamma + b^\beta c^\gamma d^\alpha + b^\gamma c^\alpha d^\beta + b^\gamma c^\beta d^\alpha.$$

Ueberhaupt soll $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \varkappa]$, wenn m die Anzahl der Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa$, ist, eine Summe von Produkten bezeichnen, die entstehen, wenn man alle Wurzeln zur mten Classe verbindet, und in jeder Complexion eine Wurzel zur Potenz α, eine andere zur Potenz β, eine dritte zur Potenz γ, u. s. w. auf so vielerley Arten, als es sich thun läßt, erhebt.

Um daher einen solchen Ausdruck $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \varkappa]$ wirklich darzustellen, suche man alle Combinationen der Wurzeln a, b,

c, d ꝛc. zur mten Classe, gebe den in jeder Complexion vorkommenden Wurzeln die Exponenten α, β, γ, ..., $\varkappa$, und permutire hierauf die Exponenten auf alle mögliche Arten. Nach diesem Algorithmus ist also z. B.

$$[\alpha\beta\gamma\delta] = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta + a^\alpha b^\beta c^\delta d^\gamma + \ldots\ldots + a^\delta b^\gamma c^\beta d^\alpha + a^\alpha b^\beta c^\gamma e^\delta + a^\alpha b^\beta c^\delta e^\gamma + \ldots\ldots + a^\delta b^\gamma c^\beta e^\alpha + \text{ꝛc.}$$

$$[\alpha\alpha\alpha\beta\beta] = a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\beta e^\beta + a^\alpha b^\alpha c^\beta d^\alpha e^\beta + \ldots + a^\beta b^\beta c^\alpha d^\alpha e^\alpha + a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\beta f^\beta + a^\alpha b^\alpha c^\beta d^\alpha f^\beta + \ldots + a^\beta b^\beta c^\alpha d^\alpha f^\alpha + \text{ꝛc.}$$

Um diese Bezeichnung noch bequemer einzurichten, werde ich da, wo ein Exponent mehrere Male vorkommt, die Wiederholungs-Exponenten brauchen, und also z. B. $[\alpha^3\beta^2]$ anstatt $[\alpha\alpha\alpha\beta\beta]$ und $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ anstatt $[\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma]$ schreiben.

Nach § 1. läßt sich daher die Beziehung zwischen den Coefficienten und den Wurzeln einer Gleichung wie folgt angeben: $-A = [1]$, $B = [11] = [1^2]$, $-C = [111] = [1^3]$, $D = [1111] = [1^4]$, $-E = [11111] = [1^5]$, u. s. w.

Aus der Art, wie die Funktion $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots \varkappa]$ konstruirt wird, ergiebt sich, daß sie zu den symmetrischen Funktionen gehöre, weil keine Veränderung in derselben vorgehet, wie man auch die Wurzeln a, b, c, d, ꝛc. unter einander vertauschen mag.

Die Funktion $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots \varkappa]$ oder allgemeiner $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d \ldots \varkappa^f]$ werde ich auch bisweilen einen Summen-Ausdruck nennen. Die Exponenten α, β, γ, δ, ..., $\varkappa$, sollen Wurzel-Exponenten heißen, um sie von den Wiederholungs-Exponenten a, b, c, d, ..., f, zu unterscheiden.

Die Wurzel-Exponenten können auch negativ seyn, und alsdann ist,

$$[-1] = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \text{ꝛc.}$$

$$[-2] = a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \text{ꝛc.}$$

. . . .

$$[-\mu] = a^{-\mu} + b^{-\mu} + c^{-\mu} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{b^\mu} + \frac{1}{c^\mu} + \text{ꝛc.}$$

und eben so

$$[\overline{-\alpha\beta}] = a^{-\alpha}b^{\beta} + a^{\beta}b^{-\alpha} + a^{-\alpha}c^{\beta} + a^{\beta}c^{-\alpha} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{b^\beta}{a^\alpha} + \frac{a^\beta}{b^\alpha} + \frac{c^\beta}{a^\alpha} + \frac{a^\beta}{c^\alpha} + \text{ꝛc.}$$

$$[\overline{-\alpha\,-\beta}] = a^{-\alpha}b^{-\beta} + a^{-\beta}b^{-\alpha} + a^{-\alpha}c^{-\beta} + a^{-\beta}c^{-\alpha} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{a^\alpha b^\beta} + \frac{1}{a^\beta b^\alpha} + \frac{1}{a^\alpha c^\beta} + \frac{1}{a^\beta c^\alpha} + \text{ꝛc.}$$

und auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den Summen-Ausdrücken, worin mehrere negative Wurzel-Exponenten vorkommen.

§ 4.

Aufg. Die Anzahl der Glieder zu finden, aus denen der Summenausdruck $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \varkappa]$ bestehet.

Aufl. 1) Es sey die Anzahl der Wurzeln a, b, c, d. ꝛc. $=$ n, und die Anzahl der Wurzelexponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \varkappa$ $=$ m.

2) Die Glieder, woraus der Summenausdruck $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots \varkappa]$ bestehet, werden gefunden, wenn man die n Wurzeln a, b, c, d, ꝛc. zur mten Classe kombinirt, und in jeder Complexion die m Wurzelexponenten, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \varkappa$, auf alle Weise permutirt (§ 3). Die Anzahl dieser Glieder ist daher dem Produkte aus der Anzahl der Combinationen von n Din-

gen zur $m$ten Classe in die Permutationszahl von m verschiedenen Dingen gleich.

3) Die Anzahl der Combinationen von n Dingen zu m ist aber

$$= \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\,.\,.\,.\,.\, n-m+2 \,.\, n-m+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\, m-1 \,.\, m}$$

und die Permutationszahl von m Dingen ist

$$= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, m-1 \,.\, m.$$

4) Mithin ist die Anzahl der Glieder des Summenausdrucks $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots \varkappa]$

$$= \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m} \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m$$

$$= n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m+2 \,.\, n-m+1$$

§ 5.

Aufg. Die Anzahl der Glieder zu finden, aus welchen der Summenausdruck $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d \ldots \varkappa^f]$ bestehet.

Aufl. 1) Es sey die Anzahl der sämmtlichen Wurzeln a, b, c, d, ꝛc. $= n$; die Anzahl der Wurzelexponenten ohne Rücksicht auf ihre Gleichheit oder Verschiedenheit, oder, welches hier das Nämliche ist, die Summe der Wiederholungsexponenten $a + b + c + d + \ldots + f = m$.

2) Da jedes Glied von $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d \ldots \varkappa^f]$, m von den Wurzeln a, b, c, d, ꝛc. enthält, so muß man auch hier, wie im vor. §, um die Anzahl der Glieder zu finden, die Combinationszahl der n Wurzeln zur $m$ten Classe mit der Permutationszahl ihrer m Wurzelexponenten multipliciren.

3) Nun ist aber die erstere

$$= \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m+2 \,.\, n-m+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots m-1 \,.\, m}.$$

Die zweyte wird gefunden, wenn man sucht, wie oft sich die Buchstaben α, β, γ, δ, ..., $\varkappa$, in einer Complexion

$\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots\ldots \varkappa^f$ versetzen lassen, worin ein Buchstabe a mal, ein anderer b mal, ein dritter c mal u. s. w. vorkommt. Die Anzahl dieser Versetzungen ist aber, wie man aus der Combinationslehre weiß

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m-1 \cdot m}{1 \cdot 2 \ldots a \times 1 \cdot 2 \ldots b \times 1 \cdot 2 \ldots c \times \ldots\ldots \times 1 \cdot 2 \ldots f}$$

4) Werden daher diese beyden Zahlen mit einander multiplicirt, so erhält man die Anzahl der Glieder von $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots \varkappa^f]$

$$= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots\ldots\ldots\ldots n-m+2 \cdot n-m+1}{1 \cdot 2 \ldots a \times 1 \cdot 2 \ldots b \times 1 \cdot 2 \ldots c \times \ldots\ldots \times 1 \cdot 2 \ldots f}$$

Zus. Wären die m Wurzelexponenten alle von einander verschieden gewesen, so würde nach dem vor. §. die Zahl der Glieder $= n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots\ldots\ldots n-m+2 \cdot n-m+1$ gewesen seyn. Hieraus folgt, daß in dem Summenausdrucke $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots\ldots \varkappa^f]$ die Zahl der Glieder um $1 \cdot 2 \ldots a \times 1 \cdot 2 \ldots b \times 1 \cdot 2 \ldots c \times \ldots\ldots \times 1 \cdot 2 \ldots f$ geringer ist, als wenn die Wurzelexponenten verschieden wären.

Beysp. Für den Summenausdruck $[\alpha^4 \beta^3 \gamma^2]$ hat man, wenn die Gleichung, worauf sich derselbe beziehet von dem zwölften Grade ist, $n = 12$, $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$; also $m = 9$. Die Zahl der Glieder, woraus derselbe bestehet, ist daher

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2} = 277200$$

§ 6.

Aufg. Es bezeichne Σ die Summe aller Combinationen ohne Wiederholungen der n Buchstaben a, b, c, d, 2c. zur mten Classe; ferner Σ′ die Summe aller derjenigen Complexionen dieser Classe, welche kein a enthalten; Σ″ die Summe aller derjenigen, welche kein b enthalten; Σ‴

die Summe aller derjenigen, welche kein c enthalten, u. s. w.: man soll die Beziehung zwischen $\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' +$ ꝛc. und Σ finden.

Aufl. 1) Wären in Σ', Σ'', Σ''', ꝛc. alle Combinationen vollständig vorhanden, oder wäre $\Sigma = \Sigma' = \Sigma'' = \Sigma''' =$ ꝛc., so hätte man $\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' +$ ꝛc. $= n\,\Sigma$. Da aber darin Complexionen fehlen, so muß auch ihre Summe kleiner als $n\,\Sigma$ seyn.

2) Es ist aber klar, daß jede der in Σ enthaltenen Complexionen in der Summe $\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' +$ ꝛc. gerade so viel mal fehlen muß, als sie Elemente enthält. Denn gesetzt, es wären die Complexionen in Σ Quaternionen, so würde z. B. die Complexion $a\,b\,c\,d$ in Σ', Σ'', Σ''', Σ^{IV} zugleich fehlen.

3) Ist daher im Allgemeinen m die Anzahl der, in jeder Complexion enthaltenen Elemente, so ist die Summe aller in $\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' +$ ꝛc. fehlenden Complexionen $m\,\Sigma$.

4) Hieraus und aus 1 folgt, daß

$$\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' + \text{ꝛc.} = (n - m)\,\Sigma$$

Zus. Es ist also $\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' +$ ꝛc. für die Unionen $= (n - 1)\,\Sigma$; für die Binionen $= (n - 2)\,\Sigma$; für die Ternionen $= (n - 3)\,\Sigma$; u. s. w.

Beysp. Es sey Σ die Summe aller Ternionen der fünf Elemente a, b, c, d, e; so ist $\Sigma = abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde$, $\Sigma' = bcd + bce + bde + cde$, $\Sigma'' = acd + ace + ade + cde$, $\Sigma''' = abd + abe + ade + bde$, $\Sigma^{IV} = abc + abe + ace + bce$, $\Sigma^{V} = abc + abd + acd + bcd$, und $\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' + \Sigma^{IV} + \Sigma^{V} = 2\,\Sigma = (5 - 3)\,\Sigma$, wie erfordert wird.

§ 7.

Aufg. Man hat zwey Gleichungen

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} + C'x^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

von welchen die zweyte die nämlichen Wurzeln hat als die erste, eine einzige, etwa a, ausgenommen: man soll die Beziehung zwischen den Coefficienten dieser beyden Gleichungen finden.

Aufl. Die zweyte Gleichung wird aus der ersten erhalten, wenn diese durch $x - a$ dividirt wird. Verrichtet man diese Division wirklich, so erhält man,

$$x^{n-1} + (a + A)\, x^{n-1} + (a^2 + aA + B)\, x^{n-2} +$$
$$(a^3 + a^2A + aB + C)\, x^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich nun $A' = a + A$, $B' = a^2 + aA + B$, $C' = a^3 + a^2A + aB + C$, etc., und im Allgemeinen

$$\overset{m}{A'} = a^m + a^{m-1}A + a^{m-2}B + a^{m-3}C + \ldots + \overset{m}{A}$$

Wenn $\overset{m}{A}$ und $\overset{m}{A'}$ den mten Coefficienten in der ersten und zweyten Gleichung bezeichnen.

§ 8.

Aufg. Aus einer gegebenen Gleichung die Summen der Quadrate, Cuben, Biquadrate, und überhaupt die Summe einer jeden beliebigen Potenz ihrer Wurzeln zu finden, ohne diese Wurzeln zu kennen, vorausgesetzt, daß der Exponent dieser Potenz eine ganze und positive Zahl sey.

Aufl. Es sey

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q = 0$$

die gegebene Gleichung, deren Wurzeln a, b, c, d, ꝛc. heißen mögen. Es seyen ferner

$$x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} + C'x^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$x^{n-1} + A''x^{n-2} + B''x^{n-3} + C''x^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$x^{n-1} + A'''x^{n-2} + B'''x^{n-3} + C'''x^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

ꝛc.

die n Gleichungen, welche entstehen, wenn die gegebene Gleichung nach einander durch $x-a$, $x-b$, $x-c$, ꝛc. dividirt wird.

2) Alsdann sind die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. die positiven oder negativen Summen der Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. s. w. der n Wurzeln a, b, c, d, ꝛc.; die Coefficienten A', B', C', D', ꝛc., die Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. s. w. der $n-1$ Wurzeln b, c, d, e, ꝛc., die Coefficienten A'', B'', C'', D'', ꝛc., die positiven oder negativen Summen der Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. s. w. der $n-1$ Wurzeln a, c, d, e, ꝛc. Es ist also (§ 6)

$$A' + A'' + A''' + \text{ꝛc.} = (n-1)\,A$$
$$B' + B'' + B''' + \text{ꝛc.} = (n-2)\,B$$
$$C' + C'' + C''' + \text{ꝛc.} = (n-3)\,C$$

ꝛc.

3) Nach dem vorig. § ist aber

$$A' = a + A,\ A'' = b + A,\ A''' = c + A,\ \text{ꝛc.}$$

Man hat daher, wenn man das Zeichen § 5 braucht

$$A' + A'' + A''' + \text{ꝛc.} = [1] + nA$$

Da ferner (vor. §)

$$B' = a^2 + aA + B,\quad B'' = b^2 + bA + B,$$
$$B''' = c^2 + cA + B,\ \text{ꝛc.}$$

so hat man auch

$$B' + B'' + B''' + \text{ꝛc.} = [2] + A\,[1] + nB$$

Eben so findet man

$$C' + C'' + C''' + \text{ꝛc.} = [3] + A\,[2] + B\,[1] + nC$$

ꝛc.

4) Aus 2 und 3 ergeben sich nun folgende Gleichungen:

$$[1] + nA = (n-1)\,A$$
$$[2] + A\,[1] + nB = (n-2)\,B$$
$$[3] + A\,[2] + B\,[1] + nC = (n-3)\,C$$

ꝛc.

oder

$$[1] + A = 0$$
$$[2] + A\,[1] + 2B = 0$$
$$[3] + A\,[2] + B\,[1] + 3\,C = 0$$

und im Allgemeinen

$$[m] + A\,[m-1] + B\,[m-2] + \ldots + \overset{m-1}{A}\,[1] + m\overset{m}{A} = 0$$

wenn $\overset{m-1}{A}$, $\overset{m}{A}$, den $(m-1)$ ten und mten Coeffienten bezeichnen, so lange $m < n$ ist. Ist aber $m =$ oder $> n$, so gelten die gemachten Schlüsse nicht mehr, weil alsdann der § 6, worauf sie sich gründen, nicht mehr anwendbar ist. Man kann aber für diesen Fall auf eine andere Weise eine ähnliche Gleichung finden.

5) Multiplicirt man nämlich die gegebene Gleichung mit x^{m-n}, so erhält man

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Px^{m-n+1} + Qx^{m-n} = 0$$

und substituirt man in derselben nach einander a, b, c, d, ꝛc. für x, so giebt dies

$$a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \ldots + Pa^{m-n+1} + Qa^{m-n} = 0$$
$$b^m + Ab^{m-1} + Bb^{m-2} + \ldots + Pb^{m-n+1} + Qb^{m-n} = 0$$
$$c^m + Ac^{m-1} + Bc^{m-2} + \ldots + Pc^{m-n+1} + Qc^{m-n} = 0$$

ꝛc.

Werden diese Gleichungen addirt, so erhält man

$$[m] + A\,[m-1] + B\,[m-2] + \ldots + P\,[m-n+1] + Q\,[m-n] = 0.$$

6) Wird hierin $m = n$ gesetzt, so hat man, weil $[0] = a^0 + b^0 + c^0 + d^0 + \text{etc.} = n$,

$$[n] + A\,[n-1] + B\,[n-2] + \ldots + P\,[1] + nQ = 0$$

7) Vermittelst der in 4, 5 und 6 gefundenen Gleichungen ist man nun im Stande, die Summe einer jeden höhern Potenz durch die Summen aller niedrigern auszudrücken, und daher, wenn diese gefunden sind, auch jene zu finden. Ich will

sie des häufigen Gebrauches wegen, der in der Folge davon gemacht wird, hier zusammen stellen.

$[1] + A = 0$

$[2] + A[1] + 2B = 0$

$[3] + A[2] + B[1] + 3C = 0$

$[4] + A[3] + B[2] + C[1] + 4D = 0$

. . . .

$[n-1] + A[n-2] + B[n-3] + \ldots + M[1] + (n-1)P = 0$

$[n] + A[n-1] + B[n-2] + \ldots + P[1] + nQ = 0$

$[n+1] + A[n] + B[n-1] + \ldots + P[2] + Q[1] = 0$

$[n+2] + A[n+1] + B[n] + \ldots + P[3] + Q[2] = 0$

. . . .

$[m] + A[m-1] + B[m-2] + \ldots + P[m-n+1]$
$+ Q[m-n] = 0$

. . . .

8) Aus diesen Gleichungen erhält man nun nach und nach

$[1] = -A$

$[2] = A^2 - 2B$

$[3] = -A^3 + 3AB - 3C$

$[4] = A^4 - 4A^2B + 2B^2 + 4AC - 4D$

$[5] = -A^5 + 5A^3B - 5AB^2 - 5A^2C + 5BC + 5Ad - 5E$

$[6] = A^6 - 6A^4B + 9A^2B^2 - 2B^3 + 6A^3C - 12ABC$
$+ 3C^2 - 6A^2D + 6BD + 6AE - 6F$

rc.

und also die Summe von den Potenzen der Wurzeln unmittelbar durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt.

Beysp. Für die Gleichung $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, ist $A = -1$, $B = -19$, $C = 49$, $D = -30$. Durch die Substitution dieser Werthe in den Gleichungen in 8 erhält man $[1] = 1$, $[2] = 39$, $[3] = -89$, $[4] = 723$, $[5] = -2849$, $[6] = 16419$, rc. Von der Richtig-

keit dieser Resultate kann man sich sehr leicht überzeugen, wenn man mit den Wurzeln jener Gleichung 1, 2, 3, — 5, die Probe macht.

Anmerk. Die Formeln in 8 sind unter dem Namen des Neutonschen Satzes bekannt, weil man Neuton für den Ersten hielt, der ihrer erwähnt (Arithmetica universalis edit. s'Graves. pag. 192). Andere Beweise dieses Satzes, wie auch manches Lehrreiche in Hinsicht auf die Geschichte desselben, findet man unter andern in Kästners Anfangsgr. der Analys. endl. Größen, dritte Aufl. S. 538 u. f., desgl. in Klügels mathem. Wörterbuch Th. I. S 465 u. f. Art. Combination.

§ 9.

Aufg. Die Summen der Potenzen von den Wurzeln einer Gleichung, oder die Ausdrücke [1], [2], [3], ꝛc. sind gegeben: man soll die Coefficienten dieser Gleichung finden.

Aufl. Aus den Gleichungen in 7 des vor. §'s erhält man durch Umkehrung

$$A = -[1]$$

$$B = -\frac{A[1] + [2]}{2}$$

$$C = -\frac{B[1] + A[2] + [3]}{3}$$

$$D = -\frac{C[1] + B[2] + A[3] + [4]}{4}$$

ꝛc.

Mit Hülfe dieser Gleichungen ist man im Stande nach und nach die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc zu bestimmen, wenn die Summenausdrücke [1], [2], [3], [4], ꝛc., wie in der Aufgabe vorausgesetzt worden, gegeben sind.

§ 10.

Aufg. Aus einer gegebenen Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$$

deren

deren unbekannte Wurzeln a, b, c, d, ꝛc. heißen mögen, eine andere Gleichung zu finden, deren Wurzeln $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, ꝛc. sind.

Aufl. Man setze $\frac{1}{y}$ für x, und multiplicire hierauf die ganze Gleichung mit y^n; so erhält man

$$Qy^n + Py^{n-1} + Ny^{n-2} + My^{n-3} + \ldots + Ay + 1 = 0$$

oder

$$y^n + \frac{P}{Q}y^{n-1} + \frac{N}{Q}y^{n-2} + \frac{M}{Q}y^{n-3} + \ldots + \frac{A}{Q} + \frac{1}{Q} = 0$$

und das ist die gesuchte Gleichung. Denn da $x = \frac{1}{y}$, so ist $y = \frac{1}{x}$; und da a, b, c, d, ꝛc. die Werthe von x sind, so sind $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, ꝛc. die Werthe von y.

Zus. Die Wurzeln $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, ꝛc. nennt man, in Beziehung auf die Wurzeln der gegebenen Gleichung, reciproke Wurzeln. Ist daher $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$ irgend eine Gleichung, und $x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + P'x + Q' = 0$ die Gleichung für ihre reciproken Wurzeln; so hat man

$$A' = \frac{P}{Q},\ B' = \frac{N}{Q},\ C' = \frac{M}{Q},\ \text{ꝛc.}$$

§ 11.

Aufg. Die Summe einer Potenz der Wurzeln zu finden, in dem Falle, da der Exponent dieser Potenz eine ganze negative Zahl ist.

Aufl. Es sey

$$x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$$

die gegebene Gleichung, und

$$x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + P'x + Q' = 0$$

die Gleichung für ihre reciproke Wurzeln (vor. §.) Alsdann ist nach § 8., wenn die Summenausdrücke [1], [2], [3], ꝛc. in Beziehung auf die zweyte Gleichung genommen werden,

$$[1] + A' = 0$$
$$[2] + A'[1] + 2B' = 0$$
$$[3] + A'[2] + B'[1] + 3C' = 0$$
ꝛc.

2) Es sind aber in Beziehung auf die zweyte Gleichung [1], [2], [3], etc. gerade das, was [−1], [−2], [−3], ꝛc. in Beziehung auf die erste Gleichung sind; man hat daher, wenn für A′, B′, C′, ꝛc. ihre Werthe $\frac{P}{Q}$, $\frac{N}{Q}$, $\frac{M}{Q}$, ꝛc. substituirt werden (vor. §)

$$[-1] + \frac{P}{Q} = 0$$
$$[-2] + \frac{P}{Q}[-1] + \frac{2N}{Q} = 0$$
$$[-3] + \frac{P}{Q}[-2] + \frac{N}{Q}[-1] + \frac{3M}{Q} = 0$$
ꝛc.

woraus sich nach und nach die Potenzensummen für negative Exponenten bestimmen lassen.

Beysp. Für die Gleichung $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$ hat man $Q = -30$, $P = +49$, $N = -19$, $M = -1$: man hat also $[-1] = \frac{49}{30}$, $[-2] = \frac{1261}{900}$, $[-3] = \frac{31159}{27000}$. Von der Richtigkeit dieser Resultate kann man sich, wenn man will, leicht überzeugen; denn die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind 1, 2, 3, −5, also [−1]

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{49}{30}$, $[-2] = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}$
$= \frac{1261}{900}$, $[-3] = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{125} = \frac{31159}{27000}$, ꝛc.

§ 12.

Aufg. Die symmetrische Funktion $[\alpha\beta]$ durch Potenzensummen auszudrücken.

Aufl. Mehrerer Deutlichkeit wegen will ich annehmen, es wären nur vier Wurzeln a, b, c, d, weil dies der Allgemeinheit nicht schaden wird. Alsdann ist

$$[\alpha] = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + d^\alpha$$

$$[\beta] = a^\beta + b^\beta + c^\beta + d^\beta.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so erhält man

$$[\alpha]\,[\beta] = a^{\alpha+\beta} + b^{\alpha+\beta} + c^{\alpha+\beta} + d^{\alpha+\beta} +$$
$$a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha + a^\alpha c^\beta + a^\beta c^\alpha + a^\alpha d^\beta + a^\beta d\alpha +$$
$$b^\alpha c^\beta + b^\beta c^\alpha + b^\alpha d^\beta + b^\beta d^\alpha + c^\alpha d^\beta + c^\beta d^\alpha.$$

Das, was in dem zweyten Theile dieser Gleichung in der ersten Zeile stehet, ist $= [\alpha + \beta]$, und das, was in den beyden übrigen Zeilen stehet, $= [\alpha\beta]$; man hat also

$$(\chi) \ldots . [\alpha]\,[\beta] = [\alpha+\beta] + [\alpha\beta]$$

und daher

$$[\alpha\beta] = [\alpha]\,[\beta] - [\alpha+\beta].$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Schlüsse gelten, die Anzahl der Wurzeln sey welche sie wolle. Da nun $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha+\beta]$, bloße Potenzsummen sind, so ist der Forderung ein Genüge geschehen.

Die Wurzelexponenten α, β, können übrigens sowohl positiv als negativ seyn. Ist z. B. α negativ, so hat man

$$[\overline{-\alpha\beta}] = [-\alpha]\,[\beta] - [\beta - \alpha]$$

und wenn α und β zugleich negativ sind,

$$[\overline{-\alpha}\ \overline{-\beta}] = [-\alpha][-\beta] - [-\alpha-\beta].$$

Zus. Da man nun jederzeit im Stande ist, die Potenzensummen sowohl für positive, als für negative Exponenten, durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken, so kann man auch immer die Werthe der Ausdrücke von der Form $a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha + a^\alpha c^\beta + a^\beta c^\alpha +$ ꝛc., $\frac{b^\beta}{a^\alpha} + \frac{a^\beta}{b^\alpha} + \frac{c^\beta}{a^\alpha} + \frac{a^\beta}{c^\alpha} +$ ꝛc., $\frac{1}{a^\alpha b^\beta} + \frac{1}{a^\beta b^\alpha} + \frac{1}{a^\alpha c^\beta} + \frac{1}{a^\beta c^\alpha} +$ ꝛc. aus diesen Coefficienten bestimmen, ohne die Wurzeln zu kennen.

§ 13.

Aufg. Den Summenausdruck $[\alpha\beta\gamma]$, welcher drey Wurzelexponenten enthält, auf solche Summenausdrücke zu reduciren, welche nicht mehr als zwey Wurzelexponenten enthalten.

Aufl. 1) Der Deutlichkeit wegen, will ich die Untersuchung nur mit drey Wurzeln, a, b, c, anfangen. Multiplicirt man die Gleichung

$$[\alpha\beta] = a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha + a^\alpha c^\beta + a^\beta c^\alpha + b^\alpha c^\beta + b^\beta c^\alpha$$

mit

$$[\gamma] = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma,$$

so erhält man

$$[\gamma][\alpha\beta] =$$

$$a^{\alpha+\gamma}b^\beta + a^\beta b^{\alpha+\gamma} + a^{\alpha+\gamma}c^\beta + a^\beta c^{\alpha+\gamma} + b^{\alpha+\gamma}c^\beta + d^\beta c^{\alpha+\gamma} +$$
$$a^{\beta+\gamma}b^\alpha + a^\alpha b^{\beta+\gamma} + a^{\beta+\gamma}c^\alpha + a^\alpha c^{\beta+\gamma} + b^{\beta+\gamma}c^\alpha + b^\alpha c^{\beta+\gamma} +$$
$$a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha b^\gamma c^\beta + a^\beta b^\alpha c^\gamma + a^\beta b^\gamma c^\alpha + a^\gamma b^\alpha c^\beta + a^\gamma b^\beta c^\alpha.$$

2) Da nun die erste Zeile in dem zweyten Theile dieser

Gleichung $= [\overline{\alpha+\gamma}\,\beta]$, die zweyte $= [\overline{\beta+\gamma}\,\alpha]$, und die dritte $= [\alpha\beta\gamma]$, so erhält man

$$(\psi) \; \ldots \; [\gamma]\,[\alpha\beta] = [\overline{\alpha+\gamma}\,\beta] + [\overline{\beta+\gamma}\,\alpha] + [\alpha\beta\gamma]$$

und hieraus ferner

$$[\alpha\beta\gamma] = [\gamma]\,[\alpha\beta] - [\overline{\alpha+\gamma}\,\beta] - [\overline{\beta+\gamma}\,\alpha]$$

Die Funktion $[\alpha\beta\gamma]$ ist also auf drey andere $[\alpha\beta]$, $[\overline{\beta+\gamma}\,\beta]$, $[\overline{\beta+\gamma}\,\alpha]$, zurückgeführt, deren jede nur zwey Wurzelexponenten enthält, wie verlangt worden.

3) Da aber hier nur drey Wurzeln a, b, c, angenommen worden, so könnte noch ein Zweifel in der Allgemeinheit des gefundenen Resultates entstehen. Der folgende Beweis wird diesen Zweifel heben.

4) Zuvörderst ist klar, daß sich in dem Produkte $[\gamma]\,[\alpha\beta]$ keine gleichen Glieder finden können. Denn man nehme irgend ein Glied, z. B. $b^{\beta+\gamma} d^{\alpha}$ aus diesem Produkte an. Ein solches Glied kann auf keine andere Weise, als durch die Multiplikation von b^{γ} aus $[\gamma]$ mit $b^{\beta} d^{\alpha}$ aus $[\alpha\beta]$ entstanden seyn. Käme nun dasselbe Glied in der Entwickelung von $[\gamma]\,[\alpha\beta]$ mehr als Einmal vor, so müßte auch $b^{\beta} d^{\alpha}$ in $[\alpha\beta]$ mehr als Einmal vorkommen, welches unmöglich ist. Es können aber in dem Aggregate $[\overline{\alpha+\gamma}\,\beta] + [\overline{\beta+\gamma}\,\alpha] + [\alpha\beta\gamma]$, welches den zweyten Theil der Gleichung $[\psi]$ ausmacht, eben so wenig gleiche Glieder vorkommen; dies erhellet unmittelbar aus der Construktion der Summenausdrücke, woraus dieses Aggregat bestehet.

5) Es bestehet aber, wenn die Anzahl der Wurzeln $= n$ ist, der Summenausdruck $[\alpha\beta]$ aus $n \,.\, n-1$ Gliedern (§ 4), und daher das Produkt $[\gamma]\,[\alpha\beta]$ aus $n^2 \,.\, n-1$ Gliedern. Die Anzahl der Glieder, welche die Summen $[\overline{\alpha+\gamma}\,\beta]$, $[\overline{\beta+\gamma}\,\alpha]$, $[\alpha\beta\gamma]$, enthalten, sind für jede der beyden ersten

$= n . n-1$, und für die letzte $= n . n-1 . n-2$; also für das Aggregat $[\overline{\alpha+\gamma}\beta] + [\overline{\beta+\gamma}\alpha] + [\alpha\beta\gamma]$, $= 2n . n-1 + n . n-1 . n-2 = n^2 . n-1$. Es enthält also dieses Aggregat eben so viele Glieder als das Produkt $[\gamma]\,[\alpha\beta]$.

6) Ich behaupte ferner, daß es in dem Aggregate $[\overline{\alpha+\gamma}\beta] + [\overline{\beta+\gamma}\alpha] + [\alpha\beta\gamma]$ kein Glied geben könne, welches nicht auch in $[\gamma]\,[\alpha\beta]$ vorhanden wäre: denn befänden sich z. B. die Glieder $c^{\alpha+\gamma}d^{\beta}$, $b^{\gamma}c^{\beta}e^{\alpha}$ nicht in $[\gamma]\,[\alpha\beta]$, so könnten sich auch die Glieder $c^{\alpha}d^{\beta}$, $c^{\beta}e^{\alpha}$ nicht in $[\alpha\beta]$ befinden, welches nicht seyn darf.

7) Aus diesen Schlüssen ergiebt sich: 1) daß die Glieder einer jeden der beyden Funktionen $[\gamma]\,[\alpha\beta]$, $[\overline{\alpha+\gamma}\beta] + [\overline{\beta+\gamma}\alpha] + [\alpha\beta\gamma]$ sämmtlich unter einander verschieden sind; 2) daß die Anzahl der Glieder in der einen so groß als in der anderen; 3) daß es in der zweyten kein Glied geben könne, welches nicht auch in der ersten enthalten wäre. Hieraus folgt aber offenbar, daß sie einander gleich seyn müssen, und daß folglich die Gleichung (ψ) für jede Anzahl der Wurzeln wahr sey.

§ 14.

Aufg. Den Summenausdruck $[\alpha\beta\gamma\delta]$ mit vier Wurzelexponenten auf andere zu reduciren, in welchen nicht mehr als höchstens drey Wurzelexponenten vorkommen.

Aufl. 1) Betrachtet man die Gleichungen (χ) und (ψ) in § 12 und § 13, so ist man, durch die Analogie geführt, die folgende Hypothese zu machen berechtigt:

$$[\delta]\,[\alpha\beta\gamma] =$$
$$[\overline{\alpha+\delta}\beta\gamma] + [\overline{\beta+\delta}\alpha\gamma] + [\overline{\gamma+\delta}\alpha\beta] + [\alpha\beta\gamma\delta].$$

Um zu prüfen, ob diese Hypothese zulässig sey, kann man den nämlichen Weg, wie im vor. § einschlagen.

2) Es läßt sich nämlich zuerst darthun, daß in der Funktion $[\delta]\ [\alpha\beta\gamma]$ kein Glied mehrere Male vorkommen könne. Denn wäre z. B. das Glied $b^{\alpha+\delta} c^{\gamma} f^{\beta}$, oder $a^{\alpha} c^{\beta} d^{\gamma} e^{\delta}$ mehrere Male in dieser Funktion enthalten, so müßte auch $b^{\alpha} c^{\gamma} f^{\beta}$, oder $a^{\alpha} c^{\beta} d^{\gamma}$, mehrere Male in $[\alpha\beta\gamma]$ vorkommen, welches unmöglich ist. Wegen der Natur der Funktion $[\overline{\alpha+\delta}\,\beta\gamma] + [\overline{\beta+\delta}\,\alpha\gamma] + [\overline{\gamma+\delta}\,\alpha\beta] + [\alpha\beta\gamma\delta]$ kann aber auch kein Glied in dieser mehrere Male vorkommen. Demnach sind die Glieder sowohl der einen als der andern Funktion sämmtlich unter einander verschieden.

3) Die Anzahl der Glieder in $[\alpha\beta\gamma]$ ist $= n . n-1 . n-2$ (§ 4), folglich die in der Funktion $[\delta]\ [\alpha\beta\gamma] = n^2 . n-1 . n-2$. Die Anzahl der Glieder in der Funktion $[\overline{\alpha+\delta}\,\beta\gamma] + [\overline{\beta+\delta}\,\alpha\gamma] + [\overline{\gamma+\delta}\,\alpha\beta] + [\alpha\beta\gamma\delta]$ ist $= 3 \times n . n-1 . n-2 + n . n-1 . n-2 . n-3 = n^2 . n-1 . n-2$. Beyde Funktionen haben daher gleich viele Glieder.

4) Es kann ferner in der Funktion $[\overline{\alpha+\delta}\,\beta\gamma] + [\overline{\beta+\delta}\,\alpha\gamma] + [\overline{\gamma+\delta}\,\alpha\beta] + [\alpha\beta\gamma\delta]$ kein Glied vorkommen, das nicht auch in der Funktion $[\delta]\ [\alpha\beta\gamma]$ vorhanden wäre. Denn wäre z. B. das Glied $b^{\alpha} d^{\gamma} e^{\beta+\delta}$, oder $a^{\gamma} b^{\beta} e^{\alpha} f^{\delta}$, das sich in der ersten Funktion befindet, nicht auch in der zweyten enthalten, so könnte sich auch $b^{\alpha} d^{\gamma} e^{\beta}$, oder $a^{\gamma} b^{\beta} e^{\alpha}$ nicht in $[\alpha\beta\gamma]$ finden; welches nicht seyn kann.

5) Aus 2, 3, 4, läßt sich nun wieder, wie im vor. §, schließen, daß die beyden gedachten Funktionen einander gleich seyn müssen, und daß daher die angenommene Gleichung richtig sey.

6) Aus dieser Gleichung erhält man aber

$$[\alpha\beta\gamma\delta] =$$
$$[\delta]\ [\alpha\beta\gamma] - [\overline{\alpha+\delta}\,\beta\gamma] - [\overline{\beta+\delta}\,\alpha\gamma] - [\overline{\gamma+\delta}\,\alpha\beta]$$

wodurch der Aufgabe ein Genüge geschiehet, weil sich in dem zweyten Theile dieser Gleichung außer [δ] nur Summenausdrücke mit drey Wurzelexponenten befinden.

§ 15.

Aufg. Den allgemeinen Summenausdruck $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\iota\kappa\lambda]$ mit m Wurzelexponenten, auf andere zu reduciren, welche höchstens m — 1 Wurzelexponenten enthalten.

Aufl. 1) Nach dem, was man in § 12, 13, 14, gesehen hat, erhält man einen hinlänglichen Grund, die folgende Gleichung anzunehmen:

$$[\lambda]\,[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\iota\kappa] =$$
$$[\overline{\alpha+\lambda}\,\beta\gamma\delta\ldots\iota\kappa] + [\overline{\beta+\lambda}\,\alpha\gamma\delta\ldots\iota\kappa] + [\overline{\gamma+\lambda}\,\alpha\beta\delta\ldots\iota\kappa]$$
$$+ \ldots\ldots + [\overline{\kappa+\lambda}\,\alpha\beta\gamma\delta\ldots\iota] + [\alpha\beta\gamma\delta\ldots\iota\kappa\lambda];$$

und die Richtigkeit derselben läßt sich sehr leicht darthun.

2) Denn es läßt sich zuerst auf eine ähnliche Art, wie in § 13 und 14, beweisen, daß sowohl die Funktion im ersten Theile, als die Funktion im zweyten Theile dieser Gleichung, lauter von einander verschiedene Glieder enthalte, und daß sich für jedes Glied in der zweyten dieser beyden Funktionen ein ihm gleiches in der ersten befinden müsse.

3) Da ferner alle Summenausdrücke, welche in der Gleichung vorkommen, m — 1 Wurzelexponenten enthalten, [λ] und $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\iota\kappa\lambda]$ ausgenommen, von welchen der letztere m Wurzelexponenten enthält, so ist wegen § 4 die Anzahl der Glieder in der Funktion des ersten Theiles dieser Gleichung

$$= n \times n\,.\,n-1\,.\,n-2\,\ldots\ldots\,n-m+2$$

und in der Funktion des zweyten Theiles

$$= m-1 \times n\,.\,n-1\,.\,n-2\ldots\ldots n-m+2 +$$
$$n\,.\,n-1\,.\,n-2\ldots\ldots n-m+2\,.\,n-m+1$$
$$= n \times n\,.\,n-1\,.\,n-2\ldots\ldots n-m+2.$$

Es bestehen also diese beyden Funktionen aus gleich vielen Gliedern.

4) Aus 2 und 3 läßt sich nun so, wie in § 13 und 14, auf die Richtigkeit der vorausgesetzten Gleichung schließen. Man erhält aber aus dieser Gleichung

$$(\Theta) \ldots\ldots\ [\alpha\beta\gamma\delta\ldots\iota\kappa\lambda] = [\lambda]\,[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\iota\kappa] - [\overline{\alpha+\lambda}\,\beta\gamma\delta\ldots\iota\kappa] - [\overline{\beta+\lambda}\,\alpha\gamma\delta\ldots\iota\kappa] - \ldots\ldots\ldots - [\overline{\kappa+\lambda}\,\alpha\beta\gamma\delta\ldots\iota]$$

wodurch der Aufgabe ein Genüge geschiehet.

Anmerk. Die Formel (Θ) gilt sowohl für positive, als für negative Wurzelexponenten, weil durch den Unterschied in den Vorzeichen die gemachten Schlüsse keine Aenderung leiden. Vermittelst derselben ist man also im Stande, einen jeden Summenausdruck $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\lambda]$ auf andere zu reduciren, welche einen Wurzelexponenten weniger enthalten, und wenn man mit dieser Verminderung der Wurzelexponenten fortfährt, endlich auf bloße Potenzensummen zu kommen, die sich alsdann weiter nach § 8 und 11, die Exponenten mögen positiv oder negativ seyn, jedesmal durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken lassen, auf welche sich der Summenausdruck beziehet.

§ 16.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Wurzelexponenten in dem Summenausdrucke $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\lambda]$ alle von einander verschieden seyen. Ist dies nicht der Fall, und hat also der Ausdruck die Form $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\ldots\kappa^f]$, so müssen die vorhergehenden Formeln, wenn sie noch ferner ihre Anwendung finden sollen, einige Modifikationen erleiden. Es wurde schon in § 5 gezeigt, daß, wenn zwey Summenausdrücke $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\ldots\kappa^f]$, $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\zeta]$, der erste mit, der andere ohne Wiederholungsexponenten, gleich viele Wurzelexponenten enthalten, die Anzahl der Glieder in dem ersteren um $1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \ldots\ldots \times 1.2\ldots f$ geringer sey, als in dem zweyten. Der Grund hiervon ist bloß darin zu suchen, daß in dem

Falle gleicher Wurzelexponenten gerade so viele Glieder in dem Summenausdrucke $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \zeta]$ für jede Combination der Wurzeln a, b, c, d, ꝛc. einander gleich werden, von denen doch immer nur je eines in $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d \ldots \varkappa^f]$ zurück behalten wird, wie aus der Lehre von den Permutationen bekannt ist. Hieraus folgt aber, daß, um die bisher gefundenen Formeln diesem Falle anzupassen, jeder Ausdruck von der Form $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d \ldots \varkappa^f]$ mit der Zahl $1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \ldots\ldots \times 1.2\ldots f$ multiplicirt werden müsse, deren Größe von den Wiederholungsexponenten a, b, c, d, ꝛc. abhängt. Diesen Faktor oder Coefficienten werde ich, der Kürze wegen, während der Rechnung durch $\varkappa$ bezeichnen, und, wenn mehrere vorkommen, durch $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ꝛc.

§ 17.

Aufg. Den Summenausdruck $[\alpha^a]$ mit a gleichen Wurzelexponenten auf andere zu reduciren, die nur $a-1$ Wurzelexponenten enthalten.

Aufl. 1) Nimmt man an, daß der Summenausdruck $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots \iota\varkappa\lambda]$ in der Gleichung (Θ) § 15, a Wurzelexponenten enthalte, und daß $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots\ldots = \lambda$ werde, so verwandelt sich dieser Ausdruck in $[\alpha^a]$, ferner das Produkt $[\lambda]\ [\alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \iota\varkappa]$ in $[\alpha]\ [\alpha^{a-1}]$, und die übrigen $a-1$ Summenausdrücke im zweyten Theile dieser Gleichung sämmtlich in $[\overline{2\alpha}\,\alpha^{a-2}]$. Werden nun noch den Summenausdrücken, aus den im vor. § angegebenen Gründen, die Coefficienten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, beygefügt, so erhält man,

$$\varkappa.\,[\alpha^a] = \varkappa'.\,[\alpha]\,[\alpha^{a-1}] - (a-1)\,\varkappa''\,[\overline{2\alpha}\,\alpha^{a-2}]$$

2) Nun ist aber $\varkappa = 1.2.3\ldots a$, $\varkappa' = 1.2.3\ldots a-1$, $\varkappa'' = 1.2.3\ldots a-2$. Werden daher diese Werthe substituirt, und dividirt man hierauf durch $1.2.3\ldots a-1$, so erhält man

$$a\,[\alpha^a] = [\alpha]\,[\alpha^{a-1}] - [\overline{2\alpha}\alpha^{a-2}].$$

Durch diese Gleichung ist also $[\alpha^a]$ auf die Summenausdrücke $[\alpha^{a-1}]$, $[\overline{2\alpha}\alpha^{a-2}]$, reducirt, deren jeder nur $a-1$ Wurzelexponenten enthält.

§ 18.

Aufg. Den Summenausdruck $[\alpha^a\beta^b]$ mit $a+b$ Wurzelexponenten auf andere zu reduciren, die einen weniger erhalten.

Aufl. Aus der Gleichung (Θ) § 15 erhält man, wenn a von den Wurzelexponenten $=\alpha$, und die b übrigen $=\beta$ gesetzt werden,

$$x.[\alpha^a\beta^b] =$$
$$x'.[\alpha][\alpha^{a-1}\beta^b] - (a-1).x''.[\overline{2\alpha}\alpha^{a-2}\beta^b]$$
$$- b.x'''.[\overline{\alpha+\beta}\alpha^{a-1}\beta^{b-1}]$$

2) Nun ist aber (§ 16)

$$x = 1.2.3\ldots.a \times 1.2.3\ldots.b$$
$$x' = 1.2.3\ldots.a-1 \times 1.2.3\ldots.b$$
$$x'' = 1.2.3\ldots.a-2 \times 1.2.3\ldots.b$$
$$x''' = 1.2.3\ldots.a-1 \times 1.2.3\ldots.b-1$$

Werden diese Werthe substituirt, und wird hierauf durch $1.2.3\ldots.a-1 \times 1.2.3\ldots.b$ dividirt, so erhält man

$$a.[\alpha^a\beta^b] =$$
$$[\alpha][\alpha^{a-1}\beta^b] - [\overline{2\alpha}\alpha^{a-2}\beta^b] - [\overline{\alpha+\beta}\alpha^{a-1}\beta^{b-1}]$$

wodurch der Aufgabe ein Genüge geschiehet.

§ 19.

Aufg. Den Summenausdruck $[\alpha^a\beta^b\gamma^c]$ mit $a+b+c$ Wurzelexponenten auf andere zu reduciren, die einen Wurzelexponenten weniger enthalten.

Aufl. 1) Aus der Gleichung (Θ) § 15 erhält man, wenn a von den Wurzelexponenten $=\alpha$, b derselben $=\beta$, und die übrigen $c=\gamma$ gesetzt werden,

$$\varkappa.[\alpha^a\beta^b\gamma^c] =$$
$$\varkappa'.[\alpha][\alpha^{a-1}\beta^b\gamma^c] - (a-1).\varkappa''.[\overline{2\alpha}\alpha^{a-2}\beta^b\gamma^c]$$
$$-b.\varkappa'''.[\overline{\ +\beta}\alpha^{a-1}\beta^{b-1}\gamma^c]$$
$$-c.\varkappa^{IV}[\overline{\alpha+\gamma}\alpha^{a-1}\beta^b\gamma^{c-1}]$$

2) Nun ist aber

$$\varkappa = 1.2.3.\dots.a \times 1.2.3.\dots.b \times 1.2.3.\dots.c$$
$$\varkappa' = 1.2.3.\dots.a\text{-}1 \times 1.2.3.\dots.b \times 1.2.3.\dots.c$$
$$\varkappa'' = 1.2.3.\dots.a\text{-}2 \times 1.2.3.\dots b \times 1.2.3.\dots.c$$
$$\varkappa''' = 1.2.3.\dots.a\text{-}1 \times 1.2.3.\dots b\text{-}1 \times 1.2.3.\dots.c$$
$$\varkappa^{IV} = 1.2.3.\dots.a\text{-}1 \times 1.2.3.\dots.b \times 1.2.3.\dots.c\text{-}1.$$

Wenn man diese Werthe substituirt, und hierauf durch $1.2.3\dots.a-1 \times 1.2.3\dots.b \times 1.2.3\dots.c$ dividirt, so erhält man

$$a[\alpha^a\beta^b\gamma^c] = [\alpha][\alpha^{a-1}\beta^b\gamma^c] - [\overline{2\alpha}\alpha^{a-2}\beta^b\gamma^c]$$
$$-[\overline{\alpha+\beta}\alpha^{a-1}\beta^{b-1}\gamma^c] - [\overline{\alpha+\gamma}\alpha^{a-1}\beta^b\gamma^{c-1}]$$

wie verlangt worden.

§ 20.

Aufg. Den allgemeinen Summenausdruck $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\dots\varkappa^k\lambda^l]$ mit $a+b+c+d+\dots+k+l$ Wurzelexponenten auf andere zu reduciren, die einen Wurzelexponenten weniger enthalten.

Aufl. Vergleicht man das Verfahren in § 18, 19, 20, so wird man daraus mit geringer Mühe die folgende allgemeine Gleichung ableiten:

$$(\text{C}) \dots\dots a[\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\dots\varkappa^k\lambda^l] =$$
$$[\alpha][\alpha^{a-1}\alpha^b\gamma^c\delta^d\dots\varkappa^k\lambda^l - [\overline{2\alpha}\alpha^{a-2}\beta^b\gamma^c\delta^d\dots\varkappa^k\lambda^l]$$
$$-[\overline{\alpha+\beta}\alpha^{a-1}\beta^{b-1}\gamma^c\delta^d\dots\varkappa^k\lambda^l] - [\overline{\alpha+\gamma}\alpha^{a-1}\beta^b\gamma^{c-1}\delta^d\dots\varkappa^k\lambda^l]$$
$$-\dots\dots\dots - [\overline{\alpha+\varkappa}\alpha^{a-1}\beta^b\gamma^c\delta^d\dots\varkappa^{k-1}\lambda^l]$$
$$-[\overline{\alpha+\lambda}\alpha^{a-1}\beta^b\gamma^c\delta^d\dots\varkappa^k\lambda^{l-1}]$$

worin jeder der Summenausdrücke im zweyten Theile nicht mehr als $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \dots + \mathfrak{k} + \mathfrak{l} - 1$ Wurzelexponenten enthält.

Die hier gefundene Formel gilt übrigens, so wie die in § 15, die Wurzelexponenten α, β, γ, rc. mögen positiv oder negativ seyn, weil hierdurch die gemachten Schlüsse keine Aenderung leiden.

Für den besonderen Fall, wo $\mathfrak{a} = 1$ ist, ist diese Formel nicht mehr anwendbar, weil die Wiederholungsexponenten $\mathfrak{a} - 1$, $\mathfrak{a} - 2$, welche darinnen vorkommen, alsdann 0 und -1 werden, welches nicht statt finden kann. Man muß alsdann die folgende Formel brauchen:

$$[\alpha\beta^{\mathfrak{b}}\gamma^{\mathfrak{c}}\delta^{\mathfrak{d}}\dots\kappa^{\mathfrak{k}}\lambda^{\mathfrak{l}}] =$$
$$[\alpha]\,[\beta^{\mathfrak{b}}\gamma^{\mathfrak{c}}\delta^{\mathfrak{d}}\dots\kappa^{\mathfrak{k}}\lambda^{\mathfrak{l}}] - [\overline{\alpha+\beta}\,\beta^{\mathfrak{b}-1}\gamma^{\mathfrak{c}}\delta^{\mathfrak{d}}\dots\kappa^{\mathfrak{k}}\lambda^{\mathfrak{l}}]$$
$$-[\overline{\alpha+\gamma}\,\beta^{\mathfrak{b}}\gamma^{\mathfrak{c}-1}\delta^{\mathfrak{d}}\dots\kappa^{\mathfrak{k}}\lambda^{\mathfrak{l}}] - \dots\dots\dots$$
$$\dots\dots - [\overline{\alpha+\lambda}\,\beta^{\mathfrak{b}}\gamma^{\mathfrak{c}}\delta^{\mathfrak{d}}\dots\kappa^{\mathfrak{k}}\lambda^{\mathfrak{l}-1}]$$

welche sich aus den nämlichen Gründen wie die vorige ableiten läßt.

Anmerk. Vermittelst der Gleichung (C) ist man nun im Stande, einen jeden Summenausdruck von der Form $[\alpha^{\mathfrak{a}}\beta^{\mathfrak{b}}\gamma^{\mathfrak{c}}\delta^{\mathfrak{d}}\dots\kappa^{\mathfrak{k}}\lambda^{\mathfrak{l}}]$, durch stäte Verminderung der Wiederholungsexponenten, auf einen andern Summenausdruck von der Form $[\alpha\beta\gamma\delta\dots\kappa\lambda]$ zu reduciren; und da sich dieser, vermittelst der Gleichung (S) in § 15, immer auf bloße Summen von Potenzen reduciren, und so endlich durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken läßt; so ist man auch jederzeit im Stande, einen jeden Summenausdruck von der Form $[\alpha^{\mathfrak{a}}\beta^{\mathfrak{b}}\gamma^{\mathfrak{c}}\delta^{\mathfrak{d}}\dots\kappa^{\mathfrak{k}}\kappa^{\mathfrak{l}}]$ durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken.

Die Gleichung (C) bleibt übrigens immer richtig, so lange man den Wurzelexponenten α, β, γ, δ, rc. keine be-

stimmte Werthe beylegt. Für bestimmte Werthe aber könnte es sich ereignen, daß Wurzelexponenten einander gleich werden, die man in dem allgemeinen Ausdrucke als verschieden ansah: wie z. B. wenn in der Gleichung (☾) $2\alpha = \beta$, oder $\alpha + \beta = \gamma$ wird. In solchen Fällen thut man wohl, um Irrungen zu vermeiden, wenn man die folgende aus (Θ) § 15 abgeleitete Gleichung beybehält:

$$\begin{aligned} \varkappa \,.\, [\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots \varkappa^f \lambda^l] = {} & \varkappa' \,.\, [\alpha]\, [\alpha^{a-1} \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots \varkappa^f \lambda^l] \\ & - (a-1) \,.\, \varkappa'' \,.\, [\overline{2\alpha}\, \alpha^{a-2} \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots \varkappa^f \lambda^l] \\ & - b \,.\, \varkappa''' \,.\, [\overline{\alpha+\beta}\, \alpha^{a-1} \beta^{b-1} \gamma^c \delta^d \ldots \varkappa^f \lambda^l] \\ & - c \,.\, \varkappa^{IV} \,.\, [\overline{\alpha+\gamma}\, \alpha^{a-1} \beta^b \gamma^{c-1} \delta^d \ldots \varkappa^f \lambda^l] \end{aligned}$$

ꝛc.

wo die Coefficienten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$, ꝛc. die in § 16 angegebenen Werthe haben.

Jede ganze oder gebrochene rationale symmetrische Funktion von den Wurzeln a, b, c, d, ꝛc, sie sey übrigens beschaffen, wie sie wolle, kann nicht anders als aus Summenausdrücken von der Form $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots \lambda^l]$ zusammengesetzt seyn. Da sich nun diese, wie wir gesehen haben, immer durch die Coefficienten der Gleichung, worauf sie sich beziehen, rational ausdrücken lassen, so können auch jene jederzeit durch diese Coefficienten rational ausgedrückt werden; welches zu beweisen der Zweck des gegenwärtigen Capitels war.

Da indessen die Lehre von den symmetrischen Funktionen in der Theorie der Gleichungen von der größten Wichtigkeit ist, und man oft nöthig hat, diese Funktionen durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken, so habe ich vier Tafeln angehängt, in welchen sich alle Summenausdrücke, worin die Summe der Wurzelexponenten die Zahl 10 nicht übersteigt, vollständig berechnet finden. Taf. I. enthält nämlich

in fünf Täfelchen die Werthe aller Summenausdrücke für die Summen 2, 3, 4, 5, 6; Taf. II. die für die Summe 7 und 8; Taf. III. die für die Summe 9, und Taf. IV. die für die Summe 10. Die Einrichtung dieser Tafeln ergiebt sich aus dem bloßen Anblicke. Die Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. sind die Coefficienten der Gleichung $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} +$ ꝛc. $= 0$, die den Summenausdrücken zum Grunde liegt, und welche bloß der leichteren Rechnung wegen mit abwechselnden Vorzeichen angenommen worden. In der Querlinie einer jeden Figur befinden sich die Summenausdrücke selbst in kombinatorischer Folge; oben in der ersten Horizontalreihe die verschiedenen Glieder ihrer Werthe, und in den Vertikalkolumnen darunter, die einem jeden Gliede, nach Verschiedenheit der Summenausdrücke zugehörigen Zahlcoefficienten. Da, wo Glieder fehlen, oder wo die Zahlcoefficienten $= 0$ sind, wurden Sternchen gesetzt. So z. B findet man in Taf. IV. $[1^2 4^2] = B^3D - 3ABCD + 3C^2D + 3A^2D^2 - 3BD^2 - AB^2E + 2A^2CE + BCE - 8ADE + 5E^2 + A^2BF - B^2F - 3ACF + 9DF - 6A^3G + 17ABG - 15CG + 6A^2H - 11\,BH - 6AI + 15K$.

Die Berechnung dieser Tafeln geschah mit Hülfe der Gleichungen (⊙) und (☾) in § 15 und § 20. Zur leichteren Anwendung derselben wird indessen erfordert, daß die Berechnung successive geschehe, und daß man, um die Summenausdrücke für irgend eine bestimmte Summe der Wurzelexponenten zu finden, schon alle die für niedrigere Summen kenne. Auch müssen die Potenzensummen mit Hülfe der Gleichungen in 8. § 8 schon gefunden seyn, die nun, wegen der Veränderung der Vorzeichen in der vorausgesetzten Gleichung, die folgenden Werthe bekommen:

$$[1] = A$$
$$[2] = A^2 - 2B$$
$$[3] = A^3 - 3AB + 3C$$
$$[4] = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D$$

ꝛc.

So z. B. hat man zur successiven Berechnung der Summenausdrücke Taf. IV. die folgenden Gleichungen:

$$[\overline{10}] = [\overline{10}]$$
$$[19] = [1]\,[9] - [\overline{10}]$$
$$[28] = [2]\,[8] - [\overline{10}]$$
$$[37] = [3]\,[7] - [\overline{10}]$$
$$[46] = [4]\,[6] - [\overline{10}]$$
$$2\,[5^2] = [5]\,[5] - [\overline{10}]$$
$$2\,[1^28] = [1]\,[18] - [28] - [19]$$
$$[127] = [1]\,[27] - [37] - [28]$$
$$[136] = [1]\,[36] - [46] - [37]$$
$$[145] = [1]\,[45] - 2\,[5^2] - [46]$$
$$2\,[2^26] = [2]\,[26] - [46] - [28]$$

ꝛc.

Die Summenausdrücke in dem ersten Theile der Gleichungen hängen hier, wie man siehet, entweder von den vorhergehenden, oder von solchen Summenausdrücken ab, die eine geringere Summe der Wurzelexponenten haben, und lassen sich also, wenn diese letzteren schon gefunden sind, successiv bestimmen.

II. Vollständige Entwickelung der symmetrischen Funktionen von den Wurzeln einer Gleichung.

§ 22.

Eine symmetrische Funktion entwickeln, soll hier so viel heißen, als einen Ausdruck für dieselbe finden, der bloß Potenzensummen enthält.

Ein zusammengesetzter Wurzelexponent soll derjenige heißen, der aus mehreren andern zusammengesetzt ist, wie $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ rc. in $[\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ rc.$]$, oder $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta +$ rc. in $[a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta +$ rc.$]$. Die Glieder des erstern sind α, β, γ, δ, rc., die Glieder des letztern $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, rc. Im Gegensatze sind α und $a\alpha$ in $[\alpha]$, $[a\alpha]$ einfache Wurzelexponenten.

Um anzuzeigen, daß ein Summenausdruck z. B. $[\alpha]$ zu irgend einer Potenz μ erhoben werden soll, werde ich schlechthin $[\alpha]^\mu$ schreiben. Man muß sich aber alsdann sehr hüten $[\alpha]^\mu$ mit $[\alpha^\mu]$ zu verwechseln; denn es ist $[\alpha]^\mu = [\alpha][\alpha][\alpha][\alpha]\ldots$, hingegen $[\alpha^\mu] = [\alpha\alpha\alpha\ldots]$. Eben so bedeutet $[3\alpha + 2\beta]^\mu$ die μte Potenz von $[3\alpha + 2\beta]$, und $[a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta +$ rc.$]^\mu$ die μte Potenz von $[a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta +$ rc.$]$

§ 23.

Aufg. Die Summenausdrücke $[\alpha\beta]$, $[\alpha\beta\gamma]$, $[\alpha\beta\gamma\delta]$ rc. völlig entwickelt darzustellen.

Aufl. 1) Aus § 12 hat man unmittelbar

$$[\alpha\beta] = [\beta][\alpha] - [\beta+\alpha]$$

2) Aus § 13 hat man zuerst

$$[\alpha\beta\gamma] = [\gamma][\alpha\beta] - [\overline{\gamma+\alpha}\,\beta] - [\overline{\gamma+\beta}\,\alpha].$$

Aus 1 erhält man aber, wenn erst $\gamma+\alpha$ für α und hernach $\gamma+\beta$ für β geschrieben wird,

$$[\overline{\gamma+\alpha}\,\beta] = [\beta][\gamma+\alpha] - [\gamma+\beta+\alpha]$$

$$[\overline{\gamma+\beta}\,\alpha] = [\gamma+\beta][\alpha] - [\gamma+\beta+\alpha]$$

Werden diese Werthe nebst dem Werthe von $[\alpha\beta]$ aus 1 in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man

$$[\alpha\beta\gamma] = [\gamma][\beta][\alpha] - [\gamma][\beta+\alpha] - [\gamma+\beta][\alpha] - [\gamma+\alpha][\beta] + 1.2[\gamma+\beta+\alpha]$$

3) Aus § 14 hat man

$$[\alpha\beta\gamma\delta] = [\delta][\alpha\beta\gamma] - [\overline{\delta+\alpha}\,\beta\gamma] - [\overline{\delta+\beta}\,\alpha\gamma] - [\overline{\delta+\gamma}\,\alpha\beta]$$

Um nun die Summenausdrücke $[\overline{\delta+\alpha}\,\beta\gamma]$, $[\overline{\delta+\beta}\,\alpha\gamma]$, $[\overline{\delta+\gamma}\,\alpha\beta]$ zu finden, darf man nur nach und nach erst $\delta+\alpha$ für α, hernach $\delta+\beta$ für β, und endlich $\delta+\gamma$ für γ in der letzten Gleichung in 2 setzen. Werden hierauf die erhaltenen Werthe nebst dem Werthe von $[\alpha\beta\gamma]$ substituirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}[\alpha\beta\gamma\delta] = {} & \\ & [\delta][\gamma][\beta][\alpha] - [\delta][\gamma][\beta+\alpha] - [\delta][\gamma+\beta][\alpha] \\ & - [\delta][\gamma+\alpha][\beta] + 1.2[\delta][\gamma+\beta+\alpha] - [\delta+\gamma][\beta][\alpha] \\ & - [\delta+\beta][\gamma][\alpha] - [\delta+\alpha][\gamma][\beta] + [\delta+\gamma][\beta+\alpha] \\ & + 1.2[\delta+\beta+\alpha][\gamma] + 1.2[\delta+\gamma+\beta][\alpha] + [\delta+\alpha][\gamma+\beta] \\ & + 1.2[\delta+\gamma+\alpha][\beta] + [\delta+\beta][\gamma+\alpha] - 1.2.3[\delta+\gamma+\beta+\alpha]\end{aligned}$$

4) Eben so hat man aus § 15

$$[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon] = [\varepsilon][\alpha\beta\gamma\delta] - [\overline{\varepsilon+\alpha}\,\beta\gamma\delta] - [\overline{\varepsilon+\beta}\,\alpha\gamma\delta] - [\overline{\varepsilon+\gamma}\,\alpha\beta\delta] - [\overline{\varepsilon+\delta}\,\alpha\beta\gamma].$$

Die Werthe von $[\overline{\varepsilon+\alpha}\beta\gamma\delta]$, $[\overline{\varepsilon+\beta}\alpha\gamma\delta]$, $[\overline{\varepsilon+\gamma}\alpha\beta\delta]$, $[\overline{\varepsilon+\delta}\alpha\beta\gamma]$ erhält man völlig entwickelt aus der letzten Gleichung in z, wenn man darin successive $\varepsilon+\alpha$ für α, $\varepsilon+\beta$ für β, $\varepsilon+\gamma$ für γ, und $\varepsilon+\delta$ für δ schreibt. Die Substitution dieser Werthe nebst dem von $[\alpha\beta\gamma\delta]$ in der vorigen Gleichung giebt die verlangte Entwickelung.

5) Auf die Weise könnte man weiter fortfahren, indem man immer von einer Entwickelung zur andern übergehet, uud so die Entwickelungen der Summenausdrücke finden, welche sechs, sieben, acht u. s. w. Wurzelexponenten enthalten.

6) Ueberhaupt, wenn man schon die Entwickelung eines Summenausdrucks $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\varkappa]$ gefunden hat, und daraus die Entwickelung eines anderen $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\varkappa\lambda]$, welcher den Wurzelexponenten λ mehr enthält, ableiten will, so darf man nur erstlich die Entwickelung von $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\varkappa]$ mit $[\lambda]$ multipliciren, hierauf in der nämlichen Entwickelung durchgängig erst $\lambda+\alpha$ für α, hernach $\lambda+\beta$ für β, hernach $\lambda+\gamma$ für γ, u. s. w. setzen, und die erhaltenen Resultate neben jenes Produkt mit veränderten Vorzeichen schreiben.

§ 24.

Aufg. Das Gesetz zu finden, nach welchem die Glieder in den Entwickelungen von $[\alpha\beta]$, $[\alpha\beta\gamma]$, $[\alpha\beta\gamma\delta]$, 2c. gebildet werden, wenn die Coefficienten und die Vorzeichen beyseit gesetzt werden.

Aufl. 1) Wenn man in den Entwickelungen der genannten Summenausdrücke im vor. § die Klammern nebst den Coefficienten und Vorzeichen wegläßt, die Wurzelexponenten, welche zu den verschiedenen Summenausdrücken in jedem Gliede gehören, durch das Komma, und die ganzen Glieder durch das Semikolon absondert, so findet man mit Zuziehung von $[\alpha]$ folgendes:

I. α

II. $\beta, \alpha;\ \beta+\alpha$

III. $\gamma, \beta, \alpha;\ \gamma, \beta+\alpha;\ \gamma+\beta, \alpha;\ \gamma+\alpha, \beta;\ \gamma+\beta+\alpha$

IV. $\delta, \gamma, \beta, \alpha;\ \delta, \gamma, \beta+\alpha;\ \delta, \gamma+\beta, \alpha;\ \delta, \gamma+\alpha, \beta$
$\delta, \gamma+\beta+\alpha;\ \delta+\gamma, \beta, \alpha;\ \delta+\beta, \gamma, \alpha;\ \delta+\alpha, \gamma, \beta$
$\delta+\gamma, \beta+\alpha;\ \delta+\beta+\alpha, \gamma;\ \delta+\gamma+\beta, \alpha;\ \delta+\alpha, \gamma+\beta$
$\delta+\gamma+\alpha, \beta;\ \delta+\beta, \gamma+\alpha;\ \delta+\gamma+\beta+\alpha$

ꝛc.

2) Die Regel der successiven Bildung der Glieder ergiebt sich hieraus und aus 6 vor. § beym ersten Anblick. Um nämlich die Glieder einer Entwickelung aus den Gliedern der unmittelbar vorhergehenden abzuleiten, muß man

a) allen Gliedern der vorhergehenden Entwickelung den neu hinzugekommenen Wurzelexponenten einzeln vorsetzen;

b) denselben durch das Zeichen + mit jedem Wurzelexponenten eines jeden Gliedes verbinden, indem man zugleich die übrigen Wurzelexponenten des nämlichen Gliedes unverändert hinschreibt.

So z. B. erhält man, wenn IV. aus III. abgeleitet werden soll, nach der Regel a)

$\delta, \gamma, \beta, \alpha;\ \delta, \gamma, \beta+\alpha;\ \delta, \gamma+\beta, \alpha;\ \delta, \gamma+\alpha, \beta;\ \delta, \gamma+\beta+\alpha$

und nach der Regel b) aus dem ersten Gliede in III.

$\delta+\gamma, \beta, \alpha;\ \delta+\beta, \gamma, \alpha;\ \delta+\alpha, \gamma, \beta;$

aus dem zweyten Gliede in III.

$\delta+\gamma, \beta+\alpha;\ \delta+\beta+\alpha, \gamma;$

aus dem dritten Gliede in III.

$\delta+\gamma+\beta, \alpha;\ \delta+\alpha, \gamma+\beta;$

aus dem vierten Gliede in III.

$\delta+\gamma+\alpha, \beta;\ \delta+\beta, \gamma+\alpha;$

endlich aus dem fünften Gliede in III.

$\delta+\gamma+\beta+\alpha.$

Der Grund dieses Verfahrens ist aus dem vorigen § so einleuchtend, daß es keiner weitern Ausführung bedarf.

3) Da aber diese Darstellungsart noch immer die Unbequemlichkeit hat, daß man, um die folgenden Entwickelungen zu finden, erst die vorhergehenden hinschreiben muß, so kann man sich hierbei mit großem Vortheile der Hindenburgschen involutorischen Methode bedienen, die meine Leser schon aus den Anfangsgründen der Combinationslehre kennen werden. Hier ist diese Involution, deren Construktion sich aus 2 sogleich ergiebt:

$$\delta \quad \gamma \quad \beta \quad \alpha$$
$$\delta \quad \gamma \quad \beta + \alpha$$
$$\delta \quad \gamma + \beta, \quad \alpha$$
$$\delta \quad \gamma + \alpha, \quad \beta$$
$$\delta \quad \gamma + \beta + \alpha$$
$$\delta + \gamma, \quad \beta, \quad \alpha$$
$$\delta + \beta, \quad \gamma, \quad \alpha$$
$$\delta + \alpha, \quad \gamma, \quad \beta$$
$$\delta + \gamma, \quad \beta + \alpha$$
$$\delta + \beta + \alpha, \quad \gamma$$
$$\delta + \gamma + \beta, \quad \alpha$$
$$\delta + \alpha, \quad \gamma + \beta$$
$$\delta + \gamma + \alpha, \quad \beta$$
$$\delta + \beta, \quad \gamma + \alpha$$
$$\delta + \gamma + \beta + \alpha$$

u. s. w.

Ich brauche nicht erst zu erinnern, daß diese Darstellungsart, außer dem Vortheil, daß sie das Gesuchte unmittelbar giebt, auch noch den hat, daß eine jede Entwickelung alle vorhergehenden in sich schließt, wie die angebrachten Haken zeigen, wie dies aus dem Begriffe von einer Involution von selbst folgt.

Anmerk. Die Involution, die hier gegeben worden, schließt übrigens, wie man leicht bemerken wird, alle mögliche Verbindungen der Wurzelexponenten α, β, γ, δ, ꝛc. zu einfachen und zusammengesetzten in sich, und kann daher noch in vielen andern Fällen, wo es darauf ankommt, alle mögliche Verbindungen dieser Art unter gegebenen Dingen zu finden, mit Nutzen gebraucht werden.

§ 25.

Aufg. Das Gesetz der Coefficienten und der Vorzeichen in der Entwickelung des Summenausdrucks $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots\lambda]$ zu finden.

Aufl. 1) Aus der Art, wie in § 23 die Entwickelungen von einander abgeleitet worden, und aus den Resultaten selbst, läßt sich mit einigem Grunde vermuthen, daß die Coefficienten der Glieder und ihre Vorzeichen den folgenden Gesetzen unterworfen seyen;

a) Daß jeder Summenausdruck eines einfachen Wurzelexponenten die Einheit zum Coefficienten habe;

b) daß jeder Summenausdruck eines zusammengesetzten Wurzelexponenten von m Gliedern den Coefficienten $1 . 2 . 3 \ldots . m-1$ erhalte;

c) daß jedem Summenausdrucke ohne Unterschied das Zeichen $-$ oder $+$ gegeben werde, nachdem die Anzahl der Glieder seines Wurzelexponenten gerade oder ungerade ist.

Es würde also, wenn es mit diesen Gesetzen seine Richtigkeit hätte, z. B. das Glied $[\alpha][\beta+\gamma][\delta+\varepsilon+\zeta][\eta+\vartheta+\iota+\varkappa]$ den Coefficienten $1 \times 1 \times 1 . 2 \times 1 . 2 . 3$ erhalten, oder schlechthin $1 . 2 \times 1 . 2 . 3$, ferner das Vorzeichen $+$, weil darin zwey Wurzelexponenten von einer geraden, und zwey von einer ungeraden Zahl der Glieder vorkommen.

Daß diese Gesetze für $[\alpha\beta]$, $[\alpha\beta\gamma]$, $[\alpha\beta\gamma\delta]$ ihre Richtigkeit haben, davon kann man sich durch den Augenschein überzeugen. Es kommt also bloß darauf an, nach einer in der Mathematik sehr gewöhnlichen Methode, den Satz zu erweisen, daß, wenn sie für irgend eine Entwickelung gelten, sie auch für die nächstfolgende gelten müssen.

3) Zu dem Ende sey

$(A) \ldots\ldots [\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\varkappa][\lambda+\mu+\nu+\ldots+\psi]$

irgend ein Glied in der Entwickelung von $[\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \psi]$. Der Wurzelexponent des ersten Summenausdrucks in (A) enthalte m Glieder, der des zweyten n Glieder. Es wird also nach der Hypothese der Coefficient des Produktes $= 1 . 2 . 3 \ldots . m-1 \times 1 . 2 . 3 \ldots . n-1$ seyn.

4) Es sey nun $[\alpha\beta\gamma \ldots . \psi\omega]$ ein anderer Summenausdruck, der den Wurzelexponenten ω mehr enthält als der vorige. Zu der Entwickelung von diesem liefert wegen 6. § 23 das Glied (A) die folgenden drey Glieder:

$$[\omega][\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\varkappa][\lambda+\mu+\nu+\ldots.+\psi]$$
$$-[\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\varkappa+\omega][\lambda+\mu+\nu+\ldots.+\psi]$$
$$-[\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\varkappa][\lambda+\mu+\nu+\ldots.+\psi+\omega]$$

5) Das erste von diesen Gliedern wird aus dem Gliede (A) erhalten, wenn man dasselbe mit $[\omega]$ multiplicirt, und hat daher mit ihm einerley Coefficient und einerley Vorzeichen, welches mit der Hypothese übereinstimmt.

6) Das zweyte Glied in 4 entstehet durch die Substitution von $\omega+\alpha$, $\omega+\beta$, $\omega+\gamma \ldots\ldots \omega+\varkappa$ für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \varkappa$, (6. § 23) und kommt also m mal vor. Eben so entstehet das dritte Glied aus der Substitution von $\omega+\lambda$, $\omega+\mu$, $\omega+\nu$, $\ldots . \omega+\psi$ für $\lambda, \mu, \nu, \ldots . \psi$, und kommt also n mal vor. Es muß also das zweyte Glied einen m mal größern,

und das dritte Glied einen n mal größern Coefficienten erhalten, als das Glied (A).

7) Hieraus folgt, daß der Coefficient des zweyten Gliedes in 4, $= 1 . 2 . 3 \ldots . m \times 1 . 2 . 3 \ldots n - 1$, und der Coefficient des dritten Gliedes, $= 1 . 2 . 3 \ldots . m - 1 \times 1 . 2 . 3 \ldots . n$ seyn wird. Auch bekommen diese Glieder ein Vorzeichen, welches dem des Gliedes (A) entgegengesetzt ist.

8) Da nun dieses mit der Hypothese übereinstimmt, so läßt sich schließen, daß, wenn die Hypothese für das Glied (A) wahr ist, sie auch für die daraus abgeleiteten Glieder in der folgenden Entwickelung wahr seyn müsse.

9) Obgleich hier das Glied (A) nur für ein Produkt von zwey Summenausdrücken angenommen worden, so siehet man doch aus der Art, wie der Beweis geführt worden, zur Genüge, daß er sich auch auf jede andere Anzahl von Faktoren ausdehnen läßt.

10) Wenn demnach die Entwickelung von $[\alpha\beta\gamma \ldots . \psi]$ den angenommenen Gesetzen unterworfen ist, so ist es auch die darauf folgende von $[\alpha\beta\gamma \ldots . \psi\omega]$. Sie gelten aber für die ersten Entwickelungen, folglich gelten sie auch für alle folgenden.

Zus. Um daher einen Summenausdruck von der Form $[\alpha\beta\gamma \ldots \lambda]$, worin alle Wurzelexponenten verschieden sind, sogleich völlig entwickelt darzustellen, darf man nur die in § 24 gelehrte Involution konstruiren, und hierauf einem jeden Gliede den nach 1 dieses §'s bestimmten Coefficienten nebst seinem Vorzeichen geben. Zur Erläuterung kann das folgende Beyspiel dienen.

Beysp. Die vollständige Entwickelung von $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$ findet man, wenn das Summationszeichen [] in den Gliedern weggelassen wird, wie folgt:

$+1,\ \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$	$+2,\ \varepsilon+\gamma+\alpha, \delta, \beta$
$-1,\ \varepsilon, \delta, \gamma, \beta+\alpha$	$+1,\ \varepsilon+\beta, \delta, \gamma+\alpha$
$-1,\ \varepsilon, \delta, \gamma+\beta, \alpha$	$-2,\ \varepsilon+\delta, \gamma+\beta+\alpha$
$-1,\ \varepsilon, \delta, \gamma+\alpha, \beta$	$-6,\ \varepsilon+\gamma+\beta+\alpha, \delta$
$+2,\ \varepsilon, \delta, \gamma+\beta+\alpha$	$+2,\ \varepsilon+\delta+\gamma, \beta, \alpha$
$-1,\ \varepsilon, \delta+\gamma, \beta, \alpha$	$+1,\ \varepsilon+\beta, \delta+\gamma, \alpha$
$-1,\ \varepsilon, \delta+\beta, \gamma, \alpha$	$+1,\ \varepsilon+\alpha, \delta+\gamma, \beta$
$-1,\ \varepsilon, \delta+\alpha, \gamma, \beta$	$+2,\ \varepsilon+\delta+\beta, \gamma, \alpha$
$+1,\ \varepsilon, \delta+\gamma, \beta+\alpha$	$+1,\ \varepsilon+\gamma, \delta+\beta, \alpha$
$+2,\ \varepsilon, \delta+\beta+\alpha, \gamma$	$+1,\ \varepsilon+\alpha, \delta+\beta, \gamma$
$+2,\ \varepsilon, \delta+\gamma+\beta, \alpha$	$+2,\ \varepsilon+\delta+\alpha, \gamma, \beta$
$+1,\ \varepsilon, \delta+\alpha, \gamma+\beta$	$+1,\ \varepsilon+\gamma, \delta+\alpha, \beta$
$+2,\ \varepsilon, \delta+\gamma+\alpha, \beta$	$+1,\ \varepsilon+\beta, \delta+\alpha, \gamma$
$+1,\ \varepsilon, \delta+\beta, \gamma+\alpha$	$-2,\ \varepsilon+\delta+\gamma, \beta+\alpha$
$-6,\ \varepsilon, \delta+\gamma+\beta+\alpha$	$-2,\ \varepsilon+\beta+\alpha, \delta+\gamma$
$-1,\ \varepsilon+\delta, \gamma, \beta, \alpha$	$-6,\ \varepsilon+\delta+\beta+\alpha, \gamma$
$-1,\ \varepsilon+\gamma, \delta, \beta, \alpha$	$-2,\ \varepsilon+\gamma, \delta+\beta+\alpha$
$-1,\ \varepsilon+\beta, \delta, \gamma, \alpha$	$-6,\ \varepsilon+\delta+\gamma+\beta, \alpha$
$-1,\ \varepsilon+\alpha, \delta, \gamma, \beta$	$-2,\ \varepsilon+\alpha, \delta+\gamma+\beta$
$+1,\ \varepsilon+\delta, \gamma, \beta+\alpha$	$-2,\ \varepsilon+\delta+\alpha, \gamma+\beta$
$+1,\ \varepsilon+\gamma, \delta, \beta+\alpha$	$-2,\ \varepsilon+\gamma+\beta, \delta+\alpha$
$+2,\ \varepsilon+\beta+\alpha, \delta, \gamma$	$-6,\ \varepsilon+\delta+\gamma+\alpha, \beta$
$+1,\ \varepsilon+\delta, \gamma+\beta, \alpha$	$-2,\ \varepsilon+\beta, \delta+\gamma+\alpha$
$+2,\ \varepsilon+\gamma+\beta, \delta, \alpha$	$-2,\ \varepsilon+\delta+\beta, \gamma+\alpha$
$+1,\ \varepsilon+\alpha, \delta, \gamma+\beta$	$-2,\ \varepsilon+\gamma+\alpha, \delta+\beta$
$+1,\ \varepsilon+\delta, \gamma+\alpha, \beta$	$+24,\ \varepsilon+\delta+\gamma+\beta+\alpha$

Man hat also $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon] = [\varepsilon][\delta][\gamma][\beta][\alpha] -$
$[\varepsilon][\delta][\gamma][\beta+\alpha] - [\varepsilon][\delta][\gamma+\beta][\alpha] -$ rc.

§ 26.

Wenn in dem Summenausdrucke $[\alpha\beta\gamma\ldots\lambda]$ mehrere Wurzelexponenten einander gleich werden, oder wenn derselbe

die Form $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \; \ldots \; \varkappa^f]$ annimmt, so läßt die Entwickelung eine Reduktion zu, weil alsdann mehrere Glieder einander gleich werden. Bey der Anwendung der Regeln a) und b) in 2. §24 hat man alsdann bloß darauf zu sehen, daß nicht ein Glied mehrere Male vorkomme, und zu dem Ende braucht man nur bey der Construktion der Involution immer auf die schon gefundenen Complexionen zurück zu blicken, und alle diejenigen Complexionen übergehen, welche schon einmal da gewesen. So z. B. findet man die Involution für die Glieder von $[\alpha^3 \beta^3]$ wie folgt:

β	β	β	α	α	α	$2\beta, \beta+\alpha, \alpha, \alpha$
β	β	β	·	2α		$2\beta, \beta+\alpha, 2\alpha$
β	β	β	3α			$2\beta, \beta+2\alpha, \alpha$
β	β	$\beta+\alpha, \alpha, \alpha$				$2\beta, \beta+3\alpha$
β	β	$\beta+\alpha, 2\alpha$				$3\beta, \alpha, \alpha, \alpha$
β	β	$\beta+2\alpha, \alpha$				$3\beta, \alpha, 2\alpha$
β	β	$\beta+3\alpha$				$3\beta, 3\alpha$
β	$2\beta, \alpha, \alpha, \alpha$					$3\beta+\alpha, \alpha, \alpha$
β	$2\beta, \alpha, 2\alpha$					$\beta+\alpha, 2\beta+\alpha, \alpha$
β	$2\beta, 3\alpha$					$\beta+\alpha, \beta+\alpha, \beta+\alpha$
β	$2\beta+\alpha, \alpha, \alpha$					$3\beta+\alpha, 2\alpha$
β	$\beta+\alpha, \beta+\alpha, \alpha$					$\beta+2\alpha, 2\beta+\alpha$
β	$2\beta+\alpha, 2\alpha$					$2\beta+2\alpha, \beta+\alpha$
β	$\beta+2\alpha, \beta+\alpha$					$3\beta+2\alpha, \alpha$
β	$2\beta+2\alpha, \alpha$					$3\beta+3\alpha$
β	$2\beta+3\alpha$					

Diese Involution enthält alle mögliche Zerfällungen von $3\alpha + 3\beta$. Eben so würde man überhaupt durch die Involution für $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \; \ldots \; \varkappa^f]$ alle mögliche Zerfällungen von $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + f\varkappa$ erhalten. Sie kann daher in allen solchen Fällen, wo es darauf ankommt, dergleichen Zerfällun=

gen mit Leichtigkeit und ohne Gefahr des Auslassens darzustellen, mit Nutzen gebraucht werden. Bey dem Summenausdruck $[\varkappa^{n}]$ reducirt sich die Operation auf eine bloße Zahlenzerfällung, wozu in der Combinationslehre Anweisung gegeben wird.

Was nun aber die Coefficienten der Glieder betrifft, so ist leicht zu begreifen, daß die Regeln a) und b) in 1. § 25, in dem Falle, daß der Summenausdruck $[\alpha\beta\gamma\ldots.\lambda]$ in $[\alpha^{a}\beta^{b}\gamma^{c}\ldots.\varkappa^{f}]$ übergehet, viele Modifikationen erleiden müssen, und zwar erstens deshalb, weil alsdann mehrere Glieder der Entwickelung zusammen fallen, zweytens der in § 16 angegebenen Gründe wegen. Um aber in der Folge nicht genöthigt zu seyn, den Faden der Untersuchung durch fremdartige Dinge zu zerreißen, will ich folgende Hülfssätze voraus schicken.

§ 27.

I. Hülfssatz.

Aufg. Zu finden, auf wie viele Arten man eine gegebene Menge von Dingen in eine bestimmte Zahl von Abtheilungen bringen kann, und zwar so, daß in jede dieser Abtheilungen eine gegebene Menge von jenen Dingen komme.

1) Auflösung für zwey Abtheilungen.

Es sey A die Anzahl der sämmtlichen vorhandenen Dinge, a die Anzahl dieser Dinge, welche man in die eine Abtheilung bringen soll, also $A-a$ die Anzahl, welche in die zweyte kommt.

Man siehet leicht, daß es hier bloß darauf ankommt, die Zahl der Combinationen von A Dingen zur Classe a zu finden. Diese ist aber

$$= \frac{A \cdot A-1 \cdot A-2 \cdots\cdots A-a+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots a};$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots A-a$ multiplicirt, und hierauf im Nenner a' für $A-a$ setzt:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots A-1 \cdot A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots a \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots a'}$$

wo a und a' die Mengen bezeichnen, welche in die beyden Abtheilungen kommen sollen.

2) Auflösung für drey Abtheilungen.

Es sey wieder A die Anzahl aller vorhandenen Dinge; ferner a, a', a'', die Mengen, welche in die erste, zweyte und dritte Abtheilung kommen sollen, also $a + a' + a'' = A$.

Es kann aber in die erste Abtheilung die Menge a auf so viele verschiedene Arten gebracht werden, als sich A Dinge zur Classe a combiniren lassen; die Zahl dieser Arten ist also

$$= \frac{A \cdot A-1 \cdots\cdots A-a+1}{1 \cdot 2 \cdots\cdots a}.$$

Eben so ist die Zahl der Arten, wie die übrigen $A-a$ Dinge in der Menge a' in die zweyte Abtheilung gebracht werden können

$$= \frac{A-a \cdot A-a-1 \cdots\cdots A-a-a'+1}{1 \cdot 2 \cdots\cdots a'}.$$

Jede dieser letztern Verbindungen kann sich jeder der ersteren zugesellen, und die Zahl, welche angiebt, auf wie viele Arten dies geschehen kann, ist daher das Produkt von jenen beyden Zahlen. Die Zahl der Arten, wie die A Dinge in die erste, zweyte und dritte Abtheilung in den Mengen a, a', a'', gebracht werden können, ist folglich

$$= \frac{A \cdot A-1 \cdot A-2 \cdots\cdots A-a-a'+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots a \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots a'},$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner mit $1,2\ldots a'' = 1.2\ldots A - a - a'$ multiplicirt.

$$= \frac{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots A-1.A}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots a' \times 1.2\ldots a''}.$$

3) Auflösung für vier Abtheilungen.

Es sey wieder A die Menge der sämmtlichen vorhandenen Dinge, und a, a', a'', a''' seyen die einzelnen Mengen derselben, welche in die erste, zweite, dritte und vierte Abtheilung kommen sollen, also $a + a' + a'' + a''' = A$. Die Zahl der Fälle, wie a Dinge aus A genommen werden können, ist

$$= \frac{A.A-1\ldots\ldots A-a+1}{1.\;2\ldots\ldots\ldots a}$$

Die Zahl der Fälle, wie aus den übrigen $A-a$ Dingen die Menge a' genommen werden kann, ist

$$= \frac{A-a.A-a-1\ldots\ldots A-a-a'+1}{1.\;2\ldots\ldots\ldots a'};$$

folglich die Zahl der Fälle, wie aus A Dingen, erst a und hierauf a' genommen werden können

$$= \frac{A.A-1\ldots\ldots A-a-a'+1}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots a'}.$$

Die Zahl der Fälle, wie aus den übrigen $A-a-a'$ Dingen die Menge a'' in die dritte Abtheilung gebracht werden kann, ist

$$= \frac{A-a-a'.A-a-a'1\ldots\ldots A-a-a'-a''+1}{1.\;2\ldots\ldots\ldots a''}.$$

Jeder dieser Fälle kann mit jedem der vorigen verbunden werden, und daher ist die Zahl der Fälle, wie die A Dinge in die vier Abtheilungen gebracht werden können.

$$= \frac{A.A-1\ldots\ldots A-a-a'-a''+1}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots a' \times 1.2\ldots a''},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $1 \cdot 2 \ldots\ldots a''' = 1 \cdot 2 \ldots\ldots A - a - a' - a''$ multiplicirt

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A}{1 \cdot 2 \ldots a \times 1 \cdot 2 \ldots a' \times 1 \cdot 2 \ldots a'' \times 1 \cdot 2 \ldots a'''}.$$

4) Allgemeine Auflösung.

Die Schlüsse, die in 1, 2, 3, gemacht worden, lassen sich leicht auf jede beliebige Anzahl von Abtheilungen ausdehnen. Die Zahl der Arten, wie A Dinge in n Abtheilungen gebracht werden können, so daß die erste die Menge a, die zweyte die Menge a' die dritte die Menge a'', u. s. w., endlich die $n$te die Menge $a^{(n-1)}$ dieser Dinge enthalte, ist daher

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A - 1 \cdot A}{1 \cdot 2 \ldots a \times 1 \cdot 2 \ldots a' \times 1 \cdot 2 \ldots a'' \times \ldots \times 1 \cdot 2 \ldots a^{(n-1)}}.$$

Beysp. Es sollen 16 Kugeln in vier Abtheilungen von 6, 5, 3 und 2 Kugeln gebracht werden: auf wie viele Arten kann dies geschehen? — Hier ist $A = 16$, $a = 6$, $a' = 5$, $a'' = 3$, $a''' = 2$; also die gesuchte Anzahl

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2}$$

$$= 20180160.$$

§ 28.

II. Hülfssatz.

Aufg. Es sind die Mengen A, B, C, ꝛc. von Dingen verschiedener Art gegeben: man soll finden, auf wie viele Arten man diese Mengen in eine gegebene Zahl von Abtheilungen bringen könne, wenn in jeder bestimmten Abtheilung eine gegebene Menge von Dingen einer jeden Art enthalten seyn soll.

Aufl. 1) Der Deutlichkeit wegen will ich den besondern Fall annehmen, es wären nur drey Mengen verschiedener Art, A, B, C, gegeben, die so in vier Abtheilungen gebracht wer-

den sollen, daß in der ersten Abtheilung a Dinge der ersten, b Dinge der zweyten, und c Dinge der dritten Art kommen, und daß a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''', das Nämliche für die zweyte, dritte und vierte Abtheilung bezeichnen, was a, b, c, für die erste: also $a + a' + a'' + a''' = A$, $b + b' + b'' + b''' = B$, $c + c' + c'' + c''' = C$. Es sey ferner

$$\lambda = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A - 1 \cdot A}{1 \cdot 2 \ldots a \times 1 \cdot 2 \ldots a' \times 1 \cdot 2 \ldots a'' \times 1 \cdot 2 \ldots a'''}$$

$$\lambda' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B - 1 \cdot B}{1 \cdot 2 \ldots b \times 1 \cdot 2 \ldots b' \times 1 \cdot 2 \ldots b'' \times 1 \cdot 2 \ldots b'''}$$

$$\lambda'' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C - 1 \cdot C}{1 \cdot 2 \ldots c \times 1 \cdot 2 \ldots c' \times 1 \cdot 2 \ldots c'' \times 1 \cdot 2 \ldots c'''}.$$

2) Nach dem vor. §. ist alsdann λ die Zahl der Arten, wie A Dinge in vier Abtheilungen von a, a', a'', a''' Dingen, λ' die Zahl der Arten, wie B Dinge in vier Abtheilungen von b, b', b'', b''' Dingen, und λ'' die Zahl der Arten, wie C Dinge in vier Abtheilungen von c, c', c'', c''', Dingen gebracht werden können.

3) Es ist aber klar, daß jede dieser Zerfällungen mit jeder der beyden andern Zerfällungen auf alle mögliche Arten verbunden werden kann. Da nun die Zahl dieser Verbindungen dem Produkte $\lambda\lambda'\lambda''$ gleich ist, so ist auch die Zahl, welche angiebt, wie oft sich die Mengen A, B, C, den angegebenen Bedingungen gemäß, mit einander verbinden lassen, ebenfalls $= \lambda\lambda'\lambda''$.

4) Was hier für drey Mengen und vier Abtheilungen bewiesen worden, kann auf eine ähnliche Art für jede andere Zahl derselben bewiesen werden. Wenn also λ', λ'', λ''', λ^{IV}, λ^{V}, zc. ähnliche Ausdrücke für die Mengen B, C, D, E, F, zc. sind, als λ für die Menge A, so ist immer die gesuchte Zahl $= \lambda\lambda'\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{IV}}\lambda^{\text{V}}$ zc.

Beysp.. Man hat 40 Kugeln von vier Farben, nämlich 10 rothe, 14 blaue, 9 grüne und 7 weiße: man soll angeben, auf wie viele Arten sich diese 40 Kugeln in drey Abtheilungen bringen lassen, und zwar so, daß in der ersten Abtheilung 7 rothe, 5 blaue, 3 grüne und 2 weiße Kugeln, in die zweyte Abtheilung 2 rothe, 6 blaue, 4 grüne und eine weiße, und in die dritte, eine rothe, 3 blaue, 2 grüne und 4 weiße kommen.

Hier ist $A = 10$, $B = 14$, $C = 9$, $D = 7$; $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 2$; $a' = 2$, $b' = 6$, $c' = 4$, $d' = 1$; $a'' = 1$, $b'' = 3$, $c'' = 2$, $d'' = 4$; also

$$\lambda = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \times 1 \cdot 2 \times 1} = 360$$

$$\lambda' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \times 1 \cdot 2 \cdot 3} = 168168$$

$$\lambda'' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2} = 1260$$

$$\lambda''' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 1 \cdot 2 \times 1} = 105$$

Die gesuchte Anzahl der möglichen Vertheilungen ist daher

$$= \lambda\lambda'\lambda''\lambda''' = 8009505504000.$$

§ 29.

III. Hülfssatz.

Aufg. Man hat mehrere Mengen A, B, C, 2c. von Dingen verschiedener Art. Man will diese Dinge in $\mu + \mu' + \mu'' + \mu'''$ + 2c. Fächern so vertheilen, daß in jedes der μ Fächer a Dinge aus der Menge A, b Dinge aus der Menge B, c Dinge aus der Menge C, u. s. w. zu liegen kommen; in jedes der μ' Fächer a' Dinge aus der Menge A, b' Dinge aus der Menge B, c' Dinge aus der Menge C, u. s. w.; in jedes der μ'' Fächer a'' Dinge

aus

aus der Menge A, b'' Dinge aus der Menge B, c'' Dinge aus der Menge C, u. s. w. u. s. w. Man soll die Anzahl aller möglichen Vertheilungen finden.

Aufl. 1) Wären die Fächer alle von einander verschieden, wie etwa, wenn sie durch verschiedene Nummern bezeichnet wären, so könnte man die Formeln des vor. §'s auch diesem Falle anpassen. Es wäre nämlich alsdann,

$$\lambda = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,A-1\,.\,A}{(1\,.\,2\,.\,.\,a)^{\mu} \times (1\,.\,2\,.\,.\,.\,a')^{\mu'} \times (1\,.\,2\,.\,.\,.\,a'')^{\mu''} \times \text{rc.}}$$

$$\lambda' = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,B-1\,.\,B}{(1\,.\,2\,.\,.\,.\,b)^{\mu} \times (1\,.\,2\,.\,.\,.\,b')^{\mu'} \times (1\,.\,2\,.\,.\,.\,b'')^{\mu''} \times \text{rc.}}$$

$$\lambda'' = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,C-1\,.\,C}{(1\,.\,2\,.\,.\,.\,c)^{\mu} \times (1\,.\,2\,.\,.\,.\,c')^{\mu'} \times (1\,.\,2\,.\,.\,.\,c'')^{\mu''} \times \text{rc.}}$$

rc.

und die Anzahl aller möglichen Vertheilungen, wie im vor. §, $= \lambda\lambda'\lambda''\lambda'''$ rc.

2) Da aber die Aufgabe nur im Allgemeinen fordert, daß die μ Fächer mit den Combinationen von a, b, c, rc. Dingen, die μ' anderen mit den Combinationen von a', b', c', rc. Dingen u. s. w. besetzt seyn sollen, so muß man, wie aus der Combinationslehre bekannt ist, die so eben gefundene Zahl noch durch $1\,.\,2\,.\,.\,.\,\mu \times 1\,.\,2\,.\,.\,.\,\mu' \times 1\,.\,2\,.\,.\,.\,\mu'' \times 1\,.\,2\,.\,.\,.\,\mu''' \times$ rc. dividiren.

3) Die gesuchte Zahl aller möglichen Vertheilungen, so wie sie die Aufgabe fordert, ist demnach

$$= \frac{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''\ \text{rc.}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,\mu \times 1\,.\,2\,.\,.\,.\,\mu' \times 1\,.\,2\,.\,.\,.\,\mu'' \times \text{rc.}}.$$

Anmerk. Es kann auch eine oder die andere der Mengen a, b, c, 2c., a', b', c', 2c., 2c. $= 0$ werden. Dies ereignet sich nämlich alsdann, wenn in einem gewissen Fache, oder in mehreren Fächern zugleich, eine oder die andere Art von Dingen gänzlich fehlen soll. In diesem Falle darf man nur, aus leicht zu begreifenden Ursachen, diejenigen von den Produkten $1 . 2 . . . . a$, $1 . 2 . . . . b$, 2c, welche sich auf die fehlenden Mengen beziehen, aus den Nennern von $\lambda, \lambda', \lambda''$, 2c. weglassen.

§ 30.

Aufg. Die Coefficienten und die Vorzeichen der Glieder in der Entwickelung von $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots \varkappa^f]$ zu finden.

Aufl. 1) Wenn in dem Summenausdrucke $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots \omega]$ mehrere Wurzelexponenten einander gleich werden, d. h. wenn dieser Ausdruck die Form $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots \varkappa^f]$ annimmt, so erhalten die Glieder der Entwickelung die folgende allgemeine Form:

$$(\psi) \ldots \left\{ \begin{array}{l} [a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + f\zeta] \\ \times [a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \ldots + l'\lambda] \\ \times [a''\alpha + b''\beta + c''\gamma + \ldots + r''\varrho] \\ \times \text{2c.} \end{array} \right\}$$

2) Da in jedem Gliede der Entwickelung von $[\alpha\beta\gamma\delta \ldots \omega]$ alle Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ in einfache und zusammengesetzte Wurzelexponenten vertheilt vorkommen (§ 24 Anmerk.); so muß auch in dem Falle, wenn dieser Summenausdruck die Form $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots \varkappa^f$ annimmt, in jedem Gliede (ψ)

$$a + a' + a'' + \text{2c.} = \mathfrak{a}, \quad b + b' + b'' + \text{2c.} = \mathfrak{b},$$
$$c + c' + c'' + \text{2c.} = \mathfrak{c}, \text{ 2c.}$$

seyn; oder mit andern Worten, die Wurzelexponenten der

Summenausdrücke, welche als Faktoren in jedem Gliede vorkommen, sind nichts anders als die Zerfällungen von $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + f\varkappa$, wie auch schon § 26 bemerkt worden. Wir müssen nun vor allem untersuchen, wie viele Glieder der Entwickelung von $[\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \omega]$ sich zur Bildung eines solchen Gliedes vereinigen.

3) Betrachtet man diejenigen Wurzelexponenten in $[\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \omega]$ die $= \alpha$ werden, als Dinge einer Art, deren Menge $= a$; diejenigen die $= \beta$ werden, als Dinge einer zweyten Art, deren Menge $= b$; diejenigen, die $= \gamma$ werden, als Dinge einer dritten Art, deren Menge $= c$, u. s. w.; so kommt es bei der Frage, wie viele Glieder der Entwickelung von $[\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \omega]$ sich zu dem Gliede (ψ) vereinigen, bloß darauf an, zu untersuchen: auf wie viele Arten sich die Mengen $a, b, c, \ldots, f$, von Dingen verschiedener Art in Abtheilungen oder Fächer von den respektiven Mengen $a, b, c, \ldots, f$; $a', b', c', \ldots, l'$; $a'', b'', c'', \ldots, r''$; u. s. w. bringen lassen.

4) Da dies nun gerade die Aufgabe § 28 ist, wenn $A = a$, $B = b$, $C = c$, ꝛc. gesetzt wird, so erhält man, wenn N die Anzahl der Glieder von $[\alpha\beta\gamma \ldots \omega]$ bezeichnet, welche sich zu (ψ) vereinigen,

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots a-1 \cdot a}{1 \cdot 2 \ldots a \times 1 \cdot 2 \ldots a' \times 1 \cdot 2 \ldots a'' \times \text{ꝛc.}} \times$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots b-1 \cdot b}{1 \cdot 2 \ldots b \times 1 \cdot 2 \ldots b' \times 1 \cdot 2 \ldots b'' \times \text{ꝛc.}} \times$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots c-1 \cdot c}{1 \cdot 2 \ldots c \times 1 \cdot 2 \ldots c' \times 1 \cdot 2 \ldots c'' \times \text{ꝛc.}} \times$$

ꝛc.

5) Jedes der Glieder, welche sich zu (ψ) vereinigen, hat wegen § 25 . 1 . b) den Coefficienten

$1.2 \ldots m-1 \times 1.2 \ldots m'-1 \times 1.2 \ldots m''-1 \times \ldots$ wenn $a+b+c+$ 2c. $=m$, $a'+b'+c'+$ 2c. $=m'$, $a''+b''+c''+$ 2c. $=m''$, u. s. w. gesetzt wird.

6) Wegen § 16 muß, wenn $[\alpha\beta\gamma\ldots\omega]$ in $[\alpha^a\beta^b\gamma^c\ldots\varkappa^k]$ übergehet, der letztere Ausdruck einen Coefficienten $\varkappa$ bekommen, durch den also jedes Glied der Entwickelung, folglich auch das Glied (ψ) dividirt werden muß. Es ist aber (Ebendas.)

$$\varkappa = 1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \ldots$$

7) Aus 4, 5, 6, ergiebt sich nun, wenn der Coefficient des Gliedes (ψ) durch K bezeichnet wird,

$$K=\frac{1.2\ldots m-1 \times 1.2\ldots m'-1 \times 1.2\ldots m''-1 \times \text{2c.}}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \text{2c.}}.N$$

oder, wenn für N sein Werth aus 4 substituirt wird,

$$K=\frac{1.2\ldots m-1 \times 1.2\ldots m'-1 \times 1.2\ldots m''-1 \times \text{2c.}}{\left\{\begin{matrix} 1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \text{2c.} \\ \times\, 1.2\ldots a' \times 1.2\ldots b' \times 1.2\ldots c' \times \text{2c.} \\ \times\, 1.2\ldots a'' \times 1.2\ldots b'' \times 1.2\ldots c'' \times \text{2c.} \\ \text{2c.} \end{matrix}\right\}}$$

8) Bisher wurde angenommen, daß alle Summenausdrücke, welche in dem Gliede (ψ) als Faktoren vorkommen, von einander verschieden wären. Ist dies nicht der Fall, oder hat das Glied die Form

$$\begin{aligned} &[a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots\ldots + f\zeta]^{\mu} \\ \times\, &[a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \ldots\ldots + l'\lambda]^{\mu'} \\ \times\, &[a''\alpha + b''\beta + c''\gamma + \ldots\ldots + r''\varrho]^{\mu''} \\ \times\, &\text{2c.} \end{aligned}$$

so ist die Zahl der Vertheilungen, welche die Mengen a, b, c, 2c. zulassen, (§ 29)

$$N = \frac{1}{1.2\ldots\mu \times 1.2\ldots\mu' \times 1.2\ldots\mu'' \times \text{rc.}} \times$$
$$\frac{1.2.3\ldots\ldots a-1.a}{(1.2\ldots a)^{\mu} \times (1.2\ldots a')^{\mu'} \times (1.2\ldots a'')^{\mu''} \times \text{rc.}} \times$$
$$\frac{1.2.3\ldots\ldots b-1.b}{(1.2\ldots b)^{\mu} \times (1.2\ldots b')^{\mu'} \times (1.2\ldots b'')^{\mu''} \times \text{rc.}} \times$$
$$\frac{1.2.3\ldots\ldots c-1.c}{(1.2\ldots c)^{\mu} \times (1.2\ldots c')^{\mu'} \times (1.2\ldots c'')^{\mu''} \times \text{rc.}} \times$$
$$\text{rc.}$$

9) Wegen § 25 1. b) ist aber der Coefficient eines jeden der Glieder, welche sich zu dem Gliede (ψ) vereinigen,

$$= (1.2\ldots m-1)^{\mu} \times (1.2\ldots m'-1)^{\mu'} \times (1.2\ldots m''-1)^{\mu''} \times \ldots$$

Ferner ist, wie in § 6

$$\varkappa = 1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \ldots$$

10) Man hat also für diesen Fall

$$K = \frac{\left[\begin{matrix}(1.2\ldots m-1)^{\mu} \times (1.2\ldots m'-1)^{\mu'} \times \\ (1.2\ldots m''-1)^{\mu''} \times \text{rc.}\end{matrix}\right]}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \text{rc.}} . N$$

oder, wenn für N sein Werth aus 8 gesetzt wird,

$$K = \frac{\left[\begin{matrix}(1.2\ldots m-1)^{\mu} \times (1.2\ldots m'-1)^{\mu'} \times \\ (1.2\ldots m''-1)^{\mu''} \times \text{rc.}\end{matrix}\right]}{\left\{\begin{matrix}1.2\ldots\mu \times 1.2\ldots\mu' \times 1.2\ldots\mu'' \times \text{rc.} \\ \times (1.2\ldots a)^{\mu} \times (1.2\ldots a')^{\mu'} \times (1.2\ldots a'')^{\mu''} \times \text{rc.} \\ \times (1.2\ldots b)^{\mu} \times (1.2\ldots b')^{\mu'} \times (1.2\ldots b'')^{\mu''} \times \text{rc.} \\ \times (1.2\ldots c)^{\mu} \times (1.2\ldots c')^{\mu'} \times (1.2\ldots c'')^{\mu''} \times \text{rc.} \\ \times \ldots\ldots \text{rc.}\end{matrix}\right\}}$$

oder auch

11)

$$K = \frac{\left[\begin{array}{c}(1\,.\,2\,.\,.\,.\,m-1)^{\mu} \times (1\,.\,2\,.\,.\,.\,m'-1)^{\mu'} \times \\ (1\,.\,2\,.\,.\,.\,m''-1)^{\mu''} \times \text{ꝛc.}\end{array}\right]}{\left\{\begin{array}{l}1\,.\,2\ldots\mu \times 1\,.\,2\ldots\mu' \times 1\,.\,2\ldots\mu'' \times \text{ꝛc.} \\ \times (1\,.\,2\ldots a \times 1\,.\,2\ldots b \times 1\,.\,2\ldots c \times \text{ꝛc.})^{\mu} \\ \times (1\,.\,2\ldots a' \times 1\,.\,2\ldots b' \times 1\,.\,2\ldots c' \times \text{ꝛc.})^{\mu'} \\ \times (1\,.\,2\ldots a'' \times 1\,.\,2\ldots b'' \times 1\,.\,2\ldots c'' \times \text{ꝛc.})^{\mu''} \\ \times \ldots\ldots \text{ꝛc.}\end{array}\right\}}$$

12) Dieser Ausdruck für K schließt den in 7 ein, weil man jenen erhält, wenn man in diesem $\mu=\mu'=\mu''=$ ꝛc. $=1$ setzt; er ist daher ganz allgemein, und gilt für alle nur erdenkbare Fälle.

In dem Falle, da eine der Zahlen m, m', m'', ꝛc. z. B. m, $=1$ wird, muß man an die Stelle des Produktes $1\,.\,2\,.\,.\,.\,m-1$ bloß 1 setzen.

13) Das Vorzeichen des Gliedes (ψ) ist immer dasselbe, als das Vorzeichen, welches der Ausdruck $(\mp m)^{\mu} \times (\mp m')^{\mu'} \times (\overline{m''})^{\mu''}$ erhält, wenn man nur jedesmal den Zahlen m, m', m'', ꝛc. das Zeichen $-$ giebt, wenn sie gerade, und das Zeichen $+$, wenn sie ungerade sind. Der Grund hiervon ergiebt sich aus § 25 1. c.

Beysp. Man soll den Coefficienten und das Vorzeichen des Gliedes

$$[3\alpha + 7\beta + 2\gamma + 4\delta]\,[5\alpha + 4\gamma + \delta]^3\,[5\alpha]^4$$

der Entwickelung von $[\alpha^{38}\beta^{7}\gamma^{14}\delta^{7}]$ bestimmen.

Hier ist $a=3$, $b=7$, $c=2$, $d=4$; $a'=5$, $b'=0$, $c'=4$, $d'=1$; $a''=5$; ferner $\mu=1$, $\mu'=3$, $\mu''=4$; also $m=a+b+c+d=16$, $m'=a'+b'+c'+d'=10$, $m''=a''=5$. Man hat daher aus der Formel in 11

$$K = \frac{(1.2.3\ldots15)^1 \times (1.2.3\ldots9)^3 \times (1.2.3.4)^4}{\left\{\begin{matrix} 1 \times 1.2.3 \times 1.2.3.4 \\ \times\, (1.2.3 \times 1.2\ldots7 \times 1.2 \times 1.2.3.4)^1 \\ \times\, (1.2.3.4.5 \times 1.2.3.4 \times 1)^3 \\ \times\, (1.2.3.4.5)^4 \end{matrix}\right\}}$$

$$= \frac{500594094}{25}.$$

Das Vorzeichen des Gliedes ist dem Vorzeichen des Ausdruckes $(-16)^1 \times (-10)^3 \times (+5)^4$ gleich, also $+$.

§ 31.

Um das, was bisher vorgetragen worden, noch deutlicher zu machen, will ich hier die vollständige Entwickelung des Summenausdruckes $[\alpha^3\beta^3]$ hersetzen, der schon in § 26 als Beyspiel zur Darstellung der Involution gebraucht wurde. Die Glieder sind so geordnet, wie sie daselbst gefunden worden.

$$[\alpha^3\beta^3] =$$

$$\tfrac{1}{36}[\alpha]^3[\beta]^3 - \tfrac{1}{12}[\alpha][2\alpha][\beta]^3 + \tfrac{1}{18}[3\alpha][\beta]^3$$
$$- \tfrac{1}{4}[\alpha]^2[\beta]^2[\alpha+\beta] + \tfrac{1}{4}[2\alpha][\beta]^2[\alpha+\beta] + \tfrac{1}{1}[\alpha][\beta]^2[2\alpha+\beta]$$
$$- \tfrac{1}{2}[\beta]^2[3\alpha+\beta] - \tfrac{1}{12}[\alpha]^3[\beta][2\beta] + \tfrac{1}{4}[\alpha][2\alpha][\beta][2\beta]$$
$$- \tfrac{1}{6}[3\alpha][\beta][2\beta] + \tfrac{1}{2}[\alpha]^2[\beta][\alpha+2\beta] + \tfrac{1}{2}[\alpha][\beta][\alpha+\beta]^2$$
$$- \tfrac{1}{2}[2\alpha][\beta][\alpha+2\beta] - [\beta][\alpha+\beta][2\alpha+\beta] - \tfrac{3}{2}[\alpha][\beta][2\alpha+2\beta]$$
$$+ 2[\beta][3\alpha+2\beta] + \tfrac{1}{4}[\alpha]^2[2\beta][\alpha+\beta] - \tfrac{1}{4}[2\alpha][2\beta][\alpha+\beta]$$
$$- \tfrac{1}{2}[\alpha][2\beta][2\alpha+\beta] + \tfrac{1}{2}[2\beta][3\alpha+\beta] + \tfrac{1}{18}[\alpha]^3[3\beta]$$
$$- \tfrac{1}{6}[\alpha][2\alpha][3\beta] + \tfrac{1}{9}[3\alpha][3\beta] - \tfrac{1}{2}[\alpha]^2[\alpha+3\beta]$$
$$- [\alpha][\alpha+\beta][\alpha+2\beta] - \tfrac{1}{6}[\alpha+\beta]^3 + \tfrac{1}{2}[2\alpha][\alpha+3\beta]$$
$$+ [\alpha+2\beta][2\alpha+\beta] + \tfrac{1}{2}[\alpha+\beta][2\alpha+2\beta] + 2[\alpha][2\alpha+3\beta]$$
$$- \tfrac{10}{3}[3\alpha+3\beta].$$

Aus diesem Beyspiele wird man hinlänglich ersehen können, wie man in jedem andern Falle zu verfahren habe, und es scheint mir unnöthig noch mehrere hinzuzufügen.

III. Von den Werthen der nicht symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung, und der Art, diese Werthe von Gleichungen abhängig zu machen.

§ 32.

Die symmetrischen Funktionen unterscheiden sich von den anderen darin, daß sie erstens die sämmtlichen Wurzeln der gegebenen Gleichung enthalten, und zweytens diese Wurzeln so mit einander kombinirt sind, daß die Funktionen bey jeder Versetzung derselben geändert bleiben. Für diese Art von Funktionen ist es also schon hinlänglich, nur im Allgemeinen die Form der Verbindung anzugeben, ohne auf die Wurzeln selbst Rücksicht zu nehmen, weil man im voraus gewiß ist, bey der Zusammensetzung immer dieselben Resultate zu erhalten. So z. B. ist der Ausdruck [12] völlig bestimmt, obgleich durch die Bezeichnung nichts weiter angezeigt wird, als daß man die Summe aller Produkte nehmen soll, welche aus der Verbindung einer jeden Wurzel mit dem Quadrate einer anderen entstehen. Eine solche Funktion kann daher nur einen einzigen Werth erhalten, und dieser Werth ist kein anderer, als der, welcher im Vorhergehenden zu finden gelehrt worden. Er ist, wie man gesehen hat, in Beziehung auf die Coefficienten der gegebenen Gleichung jederzeit rational, und er mußte es nothwendig seyn, weil sonst die Funktion mehrere Werthe haben würde.

Nicht so aber verhält es sich mit den andern Funktionen. Wollte man bei diesen bloß die Form ihrer Verbindung angeben, so würde man hierdurch allein noch nicht im Stande seyn, die Funktion zu bestimmen. Wären z. B. a, b, c, die drey Wurzeln einer Gleichung des dritten Grades, so wäre zwar die Summe aller drey Wurzeln $a + b + c$ nur einzig, hingegen würde sich die Summe zweyer Wurzeln auf dreyerley Art ausdrücken lassen, nämlich durch $a + b$, $a + c$, $b + c$, und die Differenz zweyer Wurzeln könnte sogar auf sechs verschiedene Arten ausgedrückt werden, nämlich durch $a - b$, $b - a$, $a - c$, $c - a$, $b - c$, $c - b$. Eine solche Funktion kann daher immer mehrere Werthe erhalten, welche theils aus der Vertauschung der darin befindlichen Wurzeln mit den übrigen, theils aus der Versetzung derselben entspringen. Keiner dieser Werthe kann, so lange die Wurzeln a, b, c, ꝛc. unbestimmt bleiben, für sich allein, unabhängig von den übrigen angegeben werden, weil sonst kein Grund vorhanden wäre, warum man gerade diesen oder jenen Werth, und nicht auch die anderen finden sollte. Hieraus folgt, daß der Werth einer jeden nicht symmetrischen Funktion, nicht anders als durch eine Gleichung gegeben werden kann, die alle die Werthe, welche die Funktion durch die Vertauschung und Versetzung der Wurzeln erhalten kann, zugleich in sich schließt.

Was in diesen allgemeinen Bemerkungen noch dunkel seyn sollte, werden die folgenden Aufgaben aufhellen. Ich will hier nur ein für allemal die Erinnerung voranschicken, daß ich von nun an die Wurzeln der gegebenen Gleichung nicht mehr, wie bisher geschehen war, durch a, b, c, d, ꝛc., sondern durch x', x'', x''', x^{IV}, ꝛc. bezeichnen werde. Dies geschiehet theils deshalb, weil diese Bezeichnung von den neuern Analysten ziemlich durchgängig angenommen worden, und es immer rathsam ist, die einmal eingeführte Bezeichnungsart,

wo es sich ohne Nachtheil thun läßt, beyzubehalten, theils auch deshalb, weil man gewohnt ist, mit den ersten Buchstaben des Alphabets die Idee von bestimmten Zahlenwerthen zu verbinden, da hingegen hier z. B. x', nicht diese oder jene bestimmte Wurzel, sondern überhaupt irgend eine Wurzel, gleichviel welche, bezeichnet, und die dem x angehängten Marquen nur der Unterscheidung wegen da sind.

§ 33.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

den Werth der Funktion $x'x''$ zu bestimmen, ohne die Wurzeln jener Gleichung zu kennen.

Aufl. 1) Da x', x'', x''' die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, so hat man

$$x' + x'' + x''' = A$$
$$x'x'' + x'x''' + x''x''' = B$$
$$x'x''x''' = C$$

und aus diesen dreyen Gleichungen muß man nun den Werth von $x'x''$ zu bestimmen suchen.

2) Zu dem Ende setze man $x'x'' = t$, substituire diesen Werth in der zweyten und dritten Gleichung, und multiplicire die erste Gleichung mit x'''; dies giebt

$$x'x''' + x''x''' + x'''^2 = Ax'''$$
$$t + x'x''' + x''x''' = B$$
$$x'''t = C$$

Man ziehe die erste dieser Gleichungen von der zweyten ab, und substituire hierauf für x''' seinen Werth $\frac{C}{t}$ aus der dritten Gleichung, so erhält man die folgende Gleichung für t

$$t^3 - Bt^2 + ACt - C^2 = 0.$$

Es kann also der Werth von $x'x''$ nur durch die Auflösung einer Gleichung vom dritten Grade gefunden werden.

3) Hätte man $x'x'''$, oder $x''x''' = t$ gesetzt, so würde man die nämliche Gleichung gefunden haben. Hieraus läßt sich nun mit Sicherheit schließen, daß die Werthe von $x'x''$, $x'x'''$, $x''x'''$, die drey Wurzeln der gefundenen Gleichung seyn müssen.

3) Dieser Erfolg ließ sich auch sehr wohl voraussehen. Denn da kein Grund vorhanden ist, warum die Gleichung für t gerade das Produkt $x'x''$, und nicht auch das Produkt $x'x'''$, oder $x''x'''$ geben soll, da doch die drey Wurzeln x' x'', x''', auf einerley Art in der gegebenen Gleichung enthalten sind, so mußte sie nothwendig vom dritten Grade seyn.

5) Man hätte daher auch diese Gleichung auf einem direkten Wege finden können. Da nämlich $x'x''$, $x'x'''$, $x''x'''$ die drey Wurzeln der gesuchten Gleichung seyn müssen, so kann diese keine andere als folgende seyn:

$$(t - x'x'')(t - x'x''')(t - x''x''') = 0.$$

Multiplicirt man die drey Faktoren im ersten Theile wirklich, so erhält man,

$$\begin{aligned} t^3 &- (x'x'' + x'x''' + x''x''')t^2 \\ &+ (x'^2x''x''' + x'x''^2x''' + x'x''x'''^2)t \\ &- x'^2x''^2x'''^2 = 0, \end{aligned}$$

oder da $x'x'' + x'x''' + x''x''' = B$, $x'^2x''x''' + x'x''^2x''' + x'x''x'''^2 = (x' + x'' + x''')\,x'x''x''' = AC$, $x'^2x''^2x'''^2 = (x'x''x''')^2 = C^2$, die nämliche Gleichung wie oben.

Beysp. Für die Gleichung $x^3 + x^2 - 32x - 60 = 0$, ist $A = -1$, $B = -32$; $C = 60$; man hat also

$$t^3 + 32t^2 - 60t - 3600 = 0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln die Produkte je zweyer Wurzeln jener Gleichung sind. Die Wurzeln dieser Gleichung sind nämlich $+10$, -12, -30, und die Wurzeln jener Gleichung, -2, -5, $+6$.

§ 34.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung des vierten Grades

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

den Werth der Funktion x'^2 zu bestimmen.

Aufl. 1) Da alle Wurzeln in der gegebenen Gleichung auf dieselbe Art enthalten sind, und über die Wurzel, deren Quadrat gesucht wird, nichts Näheres bestimmt worden, so kann das Quadrat einer der Wurzeln nicht gefunden werden, ohne zugleich die Quadrate aller übrigen mit zu finden. Es muß daher die Gleichung, wodurch x'^2 gegeben wird, nothwendig vom vierten Grade seyn.

2) Setzt man daher $x'^2 = t$, so muß die Gleichung, welche den Werth von t giebt, nothwendig vom vierten Grade, und die Wurzeln derselben müssen x'^2, x''^2, x'''^2, $x^{IV\,2}$ seyn. Diese Gleichung wird daher aus den vier partikulären Gleichungen

$$t - x'^2 = 0,\quad t - x''^2 = 0$$
$$t - x'''^2 = 0,\quad t - x^{IV\,2} = 0$$

zusammengesetzt seyn, und sie ist folglich nichts anders als das Produkt derselben. Die wirkliche Multiplikation giebt,

$$t^4 - (x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{IV\,2})\, t^3 +$$
$$(x'^2x''^2 + x'^2x'''^2 + x'^2x^{IV\,2} + x''^2x'''^2 + x''^2x^{IV\,2} + x'''^2x^{IV\,2})t^2$$
$$- (x'^2x''^2x'''^2 + x'^2x''^2x^{IV\,2} + x'^2x'''^2x^{IV\,2} + x''^2x'''^2x^{IV\,2})\, t$$
$$+ x'^2x''^2x'''^2x^{IV\,2} = 0.$$

Es kommt nunmehr bloß darauf an, die Coefficienten dieser Gleichung durch die Coefficienten der gegebenen auszudrücken.

2) Es läßt sich aber diese Gleichung, wenn man die Summenzeichen braucht, wie folgt darstellen:

$$t^4 - [2]t^3 + [2^2]t^2 - [2^3]t + [2^4] = 0$$

und die Werthe der Summenausdrücke erhält man unmittelbar aus den angehängten Tafeln. Man findet nämlich, da die Coefficienten E, F, 2c. = 0 sind,

$[2] = A^2 - 2B,\ [2^2] = B^2 - 2AC + 2D,$
$[2^3] = C^2 - 2BD, [2^4] = D^2,$

Substituirt man diese Werthe so erhält man

$$t^4 - (A^2 - 2B)\,t^3 + (B^2 - 2AC + 2D)\,t^2 - (C^2 - 2BD)\,t + D^2 = 0,$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

4) Man hätte diese Gleichung auch auf die folgende Art finden können. Man setze $x^2 = t$, oder $x = \sqrt{t}$, substituire diesen Werth des x in der gegebenen Gleichung, und bringe alles, was $\sqrt{t}$ enthält, auf eine Seite des Gleichheitszeichens. Hierdurch erhält man

$$t^2 + Bt + D = (At + C)\sqrt{t}.$$

Wird diese Gleichung quadrirt und gehörig geordnet, so erhält man die nämliche Gleichung wie in 3.

Beysp. Für die Gleichung $x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 2x - 12 = 0$, hat man $A = -10$, $B = 25$, $C = 2$, $D = -12$. Die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln jener Gleichung sind, ist daher

$$t^4 - 50t^3 + 641t^2 - 604t + 144 = 0.$$

Die Wurzeln von jener Gleichung sind $-3 + \sqrt{5}$, $-3 - \sqrt{5}$, $-2 + \sqrt{7}$, $-2 - \sqrt{7}$; die Wurzeln von dieser $14 - 6\sqrt{5}$, $14 + 6\sqrt{5}$, $11 - 4\sqrt{7}$, $11 + 4\sqrt{7}$; die letzteren sind die Quadrate der ersteren.

§ 35.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

den Werth der Funktion $ax'x'' + bx'''$ zu finden.

Aufl. 1) Die Gleichung, durch welche die Funktion $ax'x'' + bx'''$ gegeben wird, oder von welcher sie abhängt, muß alle mögliche Werthe derselben enthalten. Da nun in

dieser Funktion alle drey Wurzeln vorkommen, so braucht man nur, um die verschiedenen Werthe derselben zu finden, diese Wurzeln auf alle Art zu versetzen, und unter den daraus entspringenden Resultaten diejenigen zurück zu behalten, welche von einander abweichen. Die Resultate dieser Versetzungen sind aber

$$ax'x'' + bx''', \quad ax'x''' + bx'', \quad ax''x''' + bx'$$
$$ax''x' + bx''', \quad ax'''x' + bx'', \quad ax'''x'' + bx'$$

und unter diesen giebt es nicht mehr als drey verschiedene, nämlich

$$ax'x'' + bx''', \quad ax'x''' + bx'', \quad ax''x''' + bx'.$$

Die gesuchte Gleichung muß also nothwendig diese drey Funktionen zu Wurzeln haben.

2) Bezeichnet man daher unbestimmt eine jede dieser Funktionen durch t, so erhält man die drey partikulären Gleichungen:

$$t - (ax'x'' + bx''') = 0$$
$$t - (ax'x''' + bx'') = 0$$
$$t - (ax''x''' + bx') = 0$$

und das Produkt derselben giebt die Gleichung, aus welcher der Werth einer jeden der drey Funktionen bestimmt werden muß. Sie werde durch

$$t^3 - A't^2 + B't - C' = 0$$

vorgestellt.

3) Alsdann ist

$$A' = (ax'x'' + bx''') + (ax'x''' + bx'') + (ax''x''' + bx')$$
$$= a[1^2] + b[1]$$
$$B' = (ax'x'' + bx''')\,(ax'x''' + bx'')$$
$$+ (ax'x'' + bx''')\,(ax''x''' + bx')$$
$$+ (ax'x''' + bx'')\,(ax''x''' + bx')$$
$$= a^2[1^2 2] + ab[1\,2] + b^2[1^2]$$
$$C' = (ax'x'' + bx''')\,(ax'x''' + bx'')\,(ax''x''' + bx')$$
$$= a^3[2^3] + a^2b[1^2 3] + ab^2[2^2] + b^3[1^3]$$

Setzt man für die Summenausdrücke ihre Werthe aus den angehängten Tafeln, so erhält man, da D, E, ꝛc. = o sind:

$$A' = aB + bA$$

$$B' = a^2AC + ab\,(AB - 3C) + b^2B$$

$$C' = a^3C^2 + a^2b\,(A^2C - 2BC) + ab^2\,(B^2 - 2AC) + b^3\,C,$$

und daher ist die Gleichung, von welcher die gesuchte Funktion abhängt

$$t^3 - (aB + bA)\,t^2 + [a^2AC + ab\,(AB - 3C) + b^2B]\,t$$
$$- [a^3C^2 + a^2b\,(A^2C - 2BC) + ab^2(B^2 - 2AC) + b^3C] = o$$

§ 36.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = o$$

die Gleichung zu finden, von welcher die Funktion $x' - x''$ abhängt.

Aufl. Die Funktion $x' - x''$ kann die folgenden sechs Werthe erhalten, welche theils aus der Vertauschung, theils aus der Versetzung der Wurzeln entspringen:

$$x' - x'',\quad x' - x''',\quad x'' - x'''$$
$$x'' - x',\quad x''' - x',\quad x''' - x''$$

Die gesuchte Gleichung wird also das Produkt von den folgenden sechs partikulären Gleichungen seyn:

$$t - (x' - x'') = o,\quad t + (x' - x'') = o$$
$$t - (x' - x''') = o,\quad t + (x' - x''') = o$$
$$t - (x'' - x''') = o,\quad t + (x'' - x''') = o$$

oder, wenn jede zwey einander gegenüber stehende Gleichungen mit einander multiplicirt werden, das Produkt von den folgenden drey Gleichungen:

$$t^2 - (x' - x'')^2 = o$$
$$t^2 - (x' - x''')^2 = o$$
$$t^2 - (x'' - x''')^2 = o$$

woraus sich ergiebt, daß sie nur gerade Potenzen von t enthalten werde. Es sey daher:

$$t^6 - A't^4 + B't^2 - C' = 0$$

diese Gleichung; so ist

$$A' = (x' - x'')^2 + (x' - x''')^2 + (x'' - x''')^2$$
$$= 2[2] - 2[1^2]$$
$$B' = (x' - x'')^2 (x' - x''')^2 + (x' - x'')^2 (x'' - x''')^2$$
$$+ (x' - x''')^2 (x'' - x''')^2$$
$$= [4] + 3[2^2] - 2[1\,3]$$
$$C' = (x' - x'')^2 (x' - x''')^2 (x'' - x''')^2$$
$$= [24] - 2[3^2] - 6[2^3] + 2[123] - 2[1^2 4]$$

Nimmt man nun die Werthe der Summenausdrücke aus den Tafeln, so findet man nach der gehörigen Reduktion

$$A' = 2A^2 - 6B$$
$$B' = A^4 - 6A^2B + 9B^2$$
$$C' = A^2B^2 - 4B^3 - 4A^3C + 18ABC - 27C^2$$

und daher ist die gesuchte Gleichung

$$t^6 - (2A^2 - 6B)\,t^4 + (A^4 - 6A^2B + 9B^2)\,t^2$$
$$- (A^2B^2 - 4B^3 - 4A^3C + 18ABC - 27C^2) = 0$$

deren Wurzeln die Differenzen von den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Beysp. Für die Gleichung $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ ist $A = 8$, $B = 19$, $C = 12$; also $A' = 14$, $B' = 49$, $C' = 36$, und daher die Gleichung für die Differenzen

$$t^6 - 14t^4 + 49t^2 - 36 = 0$$

Die Wurzeln jener Gleichung sind $+1$, $+3$, $+4$; die Wurzeln von dieser $+1$, -1, $+2$, -2, $+3$, -3, wie erfordert wird.

§ 37.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung

$$^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

die Gleichung für den Bruch $\frac{x'}{x''}$ zu finden.

Aufl.

Aufl. 1) Die Funktion $\frac{x'}{x''}$ kann durch die Vertauschung und Versetzung der Wurzeln die folgenden sechs Werthe erhalten:

$$\frac{x'}{x''},\ \frac{x''}{x'},\ \frac{x'}{x'''},\ \frac{x'''}{x'},\ \frac{x''}{x'''},\ \frac{x'''}{x''}.$$

Die Gleichung, durch welche diese Funktionen gegeben werden, wird daher auf den sechsten Grad steigen.

2) Diese Gleichung werde durch

$$t^6 - A't^5 + B't^4 - C't^3 + D't^2 - E't + F' = 0$$

vorgestellt; so ist A' die Summe der in 1 angegebenen Funktionen, B' die Summe ihrer Produkte zu zwey und zwey, C' die Summe ihrer Produkte zu drey und drey, u. s. w. Hieraus ergeben sich nach der gehörigen Reduktion die folgenden Werthe

$$A' = \frac{x'x''^2 + x'^2x'' + x'x'''^2 + x'^2x''' + x''x'''^2 + x''^2x'''}{x'x''x'''}$$

$$= \frac{[12]}{[1^3]}$$

$$B' = 3 + \frac{x'x''^2 + x'^2x'' + x'x'''^2 + x'^2x''' + x''x'''^2 + x''^2x'''}{x'x''x'''}$$

$$+ \frac{x'^3x''^3 + x'^3x'''^3 + x''^3x'''^3 + x'x''x'''^4 + x'x''^4x''' + x'^4x''x'''}{x'^2x''^2x'''^2}$$

$$= 3 + \frac{[12]}{[1^3]} + \frac{[3^2] + [1^2 4]}{[1^3]^2}$$

$$C' = 2 + 2.\frac{x'x''^2 + x'^2x'' + x'x'''^2 + x'^2x''' + x''x'''^2 + x''^2x'''}{x'x''x'''}$$

$$+ \frac{x'^2x''^4 + x'^4x''^2 + x'^2x'''^4 + x'^4x'''^2 + x''^2x'''^4 + x''^4x'''^2}{x'^2x''^2x'''^2}$$

$$= 2 + 2.\frac{[12]}{[1^3]} + \frac{[24]}{[1^3]^2}$$

Rechnet man so weiter, so wird man für D' den nämlichen Ausdruck als für B' und für E' den nämlichen Ausdruck als

für A′ finden; ferner ist F′ als das Produkt aller obigen sechs Funktionen = 1.

3) Substituirt man nun für die Summenausdrücke ihre Werthe aus den Tafeln, so findet man

$$A' = E' = \frac{AB - 3C}{C}$$

$$B' = D' = \frac{B^3 - 5ABC + A^3C + 6C^2}{C^2}$$

$$C' = \frac{6ABC - 7C^2 + A^2B^2 - 2B^3 - 2A^3C}{C^2}$$

$$F' = 1$$

und dies sind die Coefficienten der angenommenen Gleichung für t.

Beysp. Für die Gleichung $x^3 + 2x - x - 2 = 0$ hat man $A = -2$, $B = -1$, $C = 2$. Hieraus findet man $A' = E' = -2$, $B' = D' = -\frac{13}{4}$, $C' = \frac{17}{2}$. Die gesuchte Gleichung ist also

$$t^6 + 2t^5 - \frac{13}{4}t^4 - \frac{17}{2}t^3 - \frac{13}{4}t^2 + 2t + 1 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind, -1, -1, -2, $-\frac{1}{2}$, $+2$, $+\frac{1}{2}$, wie auch seyn muß, da $+1$, -1, -2 die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

§ 38.

Die Gleichungen für t, welche wir im Vorhergehenden gefunden haben, und sich auf eine ähnliche Art für alle andere Funktionen finden lassen, können in Hinsicht auf die gegebenen, die umgeformten oder transformirten Gleichungen genannt werden. Der Grad und die Form derselben hängt von den Funktionen ab, welche man für t annimmt. Für die Funktionen, welche wir bisher betrachtet haben, war die transformirte Gleichung immer entweder von einem höheren, oder

von einem eben so hohen Grade als die gegebene. Es lassen sich aber die Funktionen angeben, für welche sie von einem niedrigern Grade wird; und in diesem Falle kann sie bisweilen zur Auflösung der gegebenen Gleichung dienen, wie hier an ein paar Beyspielen für die Gleichungen des vierten Grades gezeigt werden soll.

§ 39.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung des vierten Grades

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

den Werth der Funktion $x'x'' + x'''x^{IV}$ zu finden.

Aufl. 1) Da in der Funktion $x'x'' + x'''x^{IV}$ alle Wurzeln zugleich vorkommen, so kann sie nur durch die Versetzung derselben ihren Werth ändern. Es können aber die vier Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Arten versetzt werden, und die dadurch entstehenden Resultate sind:

$$x'x'' + x'''x^{IV}, \quad x'x''' + x''x^{IV}, \quad x'x^{IV} + x''x'''$$
$$x'x'' + x^{IV}x''', \quad x'x''' + x^{IV}x'', \quad x'x^{IV} + x'''x''$$
$$x''x' + x'''x^{IV}, \quad x'''x' + x''x^{IV}, \quad x^{IV}x' + x''x'''$$
$$x''x' + x^{IV}x''', \quad x'''x' + x^{IV}x'', \quad x^{IV}x' + x'''x''$$
$$x'''x^{IV} + x'x'', \quad x''x^{IV} + x'x''', \quad x''x''' + x'x^{IV}$$
$$x^{IV}x''' + x'x'', \quad x^{IV}x'' + x'x''', \quad x'''x'' + x'x^{IV}$$
$$x'''x^{IV} + x''x', \quad x''x^{IV} + x'''x', \quad x''x''' + x^{IV}x'$$
$$x^{IV}x''' + x''x', \quad x^{IV}x'' + x'''x', \quad x'''x'' + x^{IV}x'$$

Man siehet aber sogleich, daß immer acht von diesen Resultaten, welche sich in derselben Vertikalkolumne befinden, einander gleich sind, und daß also die Funktion nicht mehr als folgende drey verschiedene Werthe erhalten kann:

$$x'x'' + x'''x^{IV}, \quad x'x''' + x''x^{IV}, \quad x'x^{IV} + x''x'''$$

Die transformirte Gleichung wird also vom dritten Grade, und die Wurzeln derselben werden die eben genannten Werthe seyn.

2) Es werde diese Gleichung durch

$$t^3 - A't^2 + B't - C' = 0$$

vorgestellt, so ist wegen der Natur der Gleichungen

$$A' = (x'x'' + x'''x^{IV}) + (x'x''' + x''x^{IV}) + (x'x^{IV} + x''x''')$$
$$= [1^2]$$
$$B' = (x'x'' + x'''x^{IV})\,(x'x''' + x''x^{IV})$$
$$+ (x'x'' + x'''x^{IV})\,(x'x^{IV} + x''x''')$$
$$+ (x'x''' + x''x^{IV})\,(x'x^{IV} + x''x''')$$
$$= [1^2 2]$$
$$C' = (x'x'' + x'''x^{IV})\,(x'x''' + x''x^{IV})\,(x'x^{IV} + x''x''')$$
$$= [2^3] + [1^3 3]$$

3) Nimmt man nun die Werthe der Summenausdrücke aus den angehängten Tafeln, und substituirt hierauf für A', B', C', ihre gefundenen Werthe in der angenommenen Gleichung, so erhält man die gesuchte transformirte Gleichung

$$t^3 - Bt^2 + (AC - 4D)t - (C^2 - 4BD + A^2D) = 0$$

Ich will nun zeigen, welchen Gebrauch man von dieser Gleichung zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen des vierten Grades machen kann.

§ 40.

Gesetzt man könnte eine Wurzel der transformirten Gleichung finden, so sey t' diese Wurzel, also $x'x'' + x'''x^{IV} = t'$. Es kommt nunmehr bloß darauf an, aus dieser Gleichung, in Verbindung mit den andern, welche die bekannten Relationen zwischen den Wurzeln und den Coefficienten ausdrücken, die Werthe von x', x'', x''', x^{IV}, zu bestimmen.

Zu dem Ende verbinde man zuerst die beyden Gleichungen

$$x'x'' + x'''x^{IV} = t', \quad x'x''x'''x^{IV} = D.$$

Diese geben

$$(x'x'' - x'''x^{IV})^2 = (x'x'' + x'''x^{IV})^2 - 4x'x''x'''x^{IV}$$
$$= t'^2 - 4D$$
$$x'x'' - x'''x^{IV} = \sqrt{(t'^2 - 4D)}$$

also

$$x'x'' = \frac{t' + \sqrt{(t'^2 - 4D)}}{2}, \quad x'''x^{IV} = \frac{t' - \sqrt{(t'^2 - 4D)}}{2}$$

Man verbinde nun die beyden Gleichungen

$$x'''x^{IV}(x' + x'') + x'x''(x''' + x^{IV}) = B$$
$$(x' + x'') + (x''' + x^{IV}) = A$$

Diese geben,

$$x' + x'' = \frac{Ax'x'' - B}{x'x'' - x'''x^{IV}} = \frac{At' - 2B}{2\sqrt{(t'^2 - 4D)}} + \frac{A}{2}$$

$$x''' + x^{IV} = \frac{Ax'''x^{IV} - B}{x'''x^{IV} - x'x''} = -\frac{At' - 2B}{2\sqrt{(t'^2 - 4D)}} + \frac{A}{2}$$

Man kennet also nunmehr die Werthe von $x'x''$, $x' + x''$, $x'''x^{IV}$, $x''' + x^{IV}$. Aus den beyden ersten dieser Werthe lassen sich aber die Wurzeln x', x'', und aus den beyden letztern die Wurzeln x''', x^{IV}, bloß durch die Auflösung quadratischer Gleichungen bestimmen.

Bey dieser Auflösung ist es also schon hinreichend, nur eine einzige Wurzel der transformirten Gleichung zu kennen.

§ 40.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung des vierten Grades

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

den Werth der Funktion $(x' + x'' - x''' - x^{IV})^2$ zu bestimmen.

Aufl. 1) Verfährt man mit dieser Funktion eben so, wie in § 39 mit der Funktion $x'x'' + x'''x^{IV}$, so wird man nicht mehr als folgende drey verschiedene Werthe finden:

$$(x' + x'' - x''' - x^{IV})^2, \quad (x' + x''' - x'' - x^{IV})^2$$
$$(x' + x^{IV} - x'' - x''')^2$$

die also ebenfalls von einer Gleichung des dritten Grades abhängen. Diese Gleichung könnte man nun zwar auf dem gewöhnlichen Wege finden: das folgende Verfahren führt jedoch hier weit kürzer zum Zweck.

2) Setzt man nämlich $(x' + x'' - x''' - x^{IV})^2 = t$; so ist

$$t = x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{IV2} + 2x'x'' - 2x'x''' - 2x'x^{IV} - 2x''x''' - 2x''x^{IV} + 2x'''x^{IV}$$

$$= (x' + x'' + x''' + x^{IV})^2 - 4(x'x'' + x'x''' + x'x^{IV} + x''x''' + x''x^{IV} + x'''x^{IV}) + 4(x'x'' + x'''x^{IV})$$

$$= [1]^2 - 4[1^2] + 4(x'x'' + x'''x^{IV})$$

$$= A^2 - 4B + 4(x'x'' + x'''x^{IV})$$

und daher

$$x'x'' + x'''x^{IV} = \frac{t - A^2 + 4B}{4}$$

3) Da nun $x'x'' + x'''x^{IV}$ gerade die Funktion ist, für welche in § 39 die Gleichung $t^3 - Bt^2 + (AC - 4D)t - (C^2 - 4BD + A^2D) = 0$ gefunden worden, so darf man in derselben nur $\frac{t - A^2 + 4B}{4}$ statt t setzen. Hierdurch findet man die Gleichung

$$t^3 - (3A^2 - 8B)t^2 + (3A^4 - 16A^2B + 16B^2 + 16AC - 64D)t - (A^3 - 4AB + 8C)^2 = 0$$

deren Wurzeln also die in 1 genannten Funktionen sind.

Auch hieraus läßt sich, wie im vor. §, eine Auflösung der Gleichungen des vierten Grades herleiten, wie man sogleich sehen wird; nur wird dabey vorausgesetzt, daß man alle drey Wurzeln dieser Gleichung gefunden habe.

§ 41.

Es seyen t', t'', t''', die drey Wurzeln der transformirten Gleichung des vor. §'s, so hat man

$$(x' + x'' - x''' - x^{IV})^2 = t'$$
$$(x' + x''' - x'' - x^{IV})^2 = t''$$
$$(x' + x^{IV} - x'' - x''')^2 = t'''$$

und daher

$$x' + x'' - x''' - x^{IV} = \sqrt{t'}$$

$$x' + x''' - x'' - x^{IV} = \sqrt{t''}$$

$$x' + x^{IV} - x' - x''' = \sqrt{t'''}$$

Verbindet man diese drey Gleichungen mit der

$$x' + x'' + x''' + x^{IV} = A$$

so erhält man durch eine bloße Addition und Subtraktion folgende Ausdrücke für die Wurzeln:

$$x' = \frac{A + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$x'' = \frac{A + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

$$x''' = \frac{A - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

$$x^{IV} = \frac{A - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

Man hat also auf der Stelle die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, sobald man nur die für t aufgelöst hat.

Aber hier zeigt sich eine anscheinende Schwierigkeit. Da nämlich in den Werthen von x', x'', x''', x^{IV}, drey Wurzelgrößen $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ vorkommen, und diese Wurzelgrößen sowohl positiv als negativ angenommen werden können, so entsteht die Frage, wie man es anzufangen habe, um die denselben zugehörigen Vorzeichen zu bestimmen. Zu dem Ende betrachte man das letzte Glied der transformirten Gleichung. Da dieses Glied das Produkt ihrer drey Wurzeln seyn muß, so hat man

$$(A^3 - 4AB + 8C)^2 = t't''t'''$$

also

$$A^3 - 4AB + 8C = \sqrt{t't''t'''} = \sqrt{t'} . \sqrt{t''} . \sqrt{t'''}$$

Ist nun $A^3 - 4AB + 8C$ positiv, so muß auch das Produkt $\sqrt{t'} . \sqrt{t''} . \sqrt{t'''}$ positiv seyn, und es können folglich

alsdann die Vorzeichen nur auf die folgenden vier Arten mit einander kombinirt werden:

$$+\sqrt{t'},\ +\sqrt{t''},\ +\sqrt{t'''}$$
$$+\sqrt{t'},\ -\sqrt{t''},\ -\sqrt{t'''}$$
$$-\sqrt{t'},\ +\sqrt{t''},\ -\sqrt{t'''}$$
$$-\sqrt{t'},\ -\sqrt{t''},\ +\sqrt{t'''}$$

und diese Verbindungen geben die obigen Werthe für x', x'', x''', x^{IV}.

Ist hingegen $A^3 - 4AB + 8C$ negativ, so ist auch das Produkt $\sqrt{t'} \cdot \sqrt{t''} \cdot \sqrt{t'''}$ negativ, und es können daher in diesem Falle die Vorzeichen nur auf folgende vier Arten mit einander verbunden seyn

$$+\sqrt{t'},\ +\sqrt{t''},\ -\sqrt{t'''}$$
$$+\sqrt{t'},\ -\sqrt{t''},\ +\sqrt{t'''}$$
$$-\sqrt{t'},\ +\sqrt{t''},\ +\sqrt{t'''}$$
$$-\sqrt{t'},\ -\sqrt{t''},\ -\sqrt{t'''}$$

und diese Verbindungen geben die nachstehenden Werthe für x', x'', x''', x^{IV}:

$$x' = \frac{A + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

$$x'' = \frac{A + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$x''' = \frac{A - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}$$

$$x^{IV} = \frac{A - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}$$

Beysp. Für die Gleichung $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = 0$, ist $A = 3$, $B = -15$, $C = -19$; $D = 30$. Diese Werthe in der transformirten Gleichung substituirt, geben

$$t^3 - 147t^2 + 3171t - (+55)^2$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 1, 25, 121. Da nun hier

$A^3 - 4AB + 8C = + 55$, also positiv, so müssen die vier ersten Werthe für x', x'', x''', x^{IV}, genommen werden, und diese geben $x' = 5$, $x'' = -3$, $x''' = -1$, $x^{IV} = +2$.

§ 42.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung des unbestimmten nten Grades

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{rc.} = 0$$

eine andere Gleichung für die Quadrate ihrer Wurzeln zu finden.

Aufl. 1) Die gesuchte Gleichung soll die Wurzeln x'^2, x''^2, x'''^2, $x^{IV 2}$, rc haben, sie muß also aus den n einfachen Gleichungen $t - x'^2 = 0$, $t - x''^2 = 0$, $t - x'''^2 = 0$, rc. zusammengesetzt seyn. Hieraus ergiebt sich nun, wie in § 34, die transformirte Gleichung

$$t^n - [2]\, t^{n-1} + [2^2]\, t^{n-2} - [2^3]\, t^{n-3} + [2^4]\, t^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots \pm [2^{n-1}]\, t \mp [2^n] = 0$$

Die Summenausdrücke können entweder unmittelbar aus den Tafeln genommen, oder auf die in den beyden vorhergehenden Capiteln gelehrte Weise gefunden werden.

2) Es läßt sich aber diese Gleichung auch durch die zweyte Methode in § 34 finden. Man setze nämlich $x^2 = t$, also $x = \sqrt{t}$, und substituire diesen Werth des x in der gegebenen Gleichung. Hierbey müssen nun zwey Fälle unterschieden werden; nämlich: 1) wenn n gerade, 2) wenn n ungerade ist.

3) Es sey zuerst $n = 2m$. Man ordne die gegebene Gleichung wie folgt:

$$x^{2m} + Bx^{2m-2} + Dx^{2m-4} + Fx^{2m-6} + \text{rc.}$$
$$= Ax^{2m-1} + Cx^{2m-3} + Ex^{2m-5} + Gx^{2m-7} + \text{rc.}$$

Man setze nun $\sqrt{t}$ für x; dies giebt

$$t^m + Bt^{m-1} + Dt^{m-2} + Ft^{m-3} + \text{rc.}$$
$$= (At^{m-1} + Ct^{m-2} + Et^{m-3} + Gt^{m-4} + \text{rc.})\sqrt{t};$$

oder, wenn man beyde Theile dieser Gleichung quadrirt, und die Glieder gehörig ordnet,

$$t^{2m} + (2B - A^2)t^{2m-1} + (2D - 2AC + B^2)t^{2m-2}$$
$$+ (2F - 2AE + 2BD - C^2)t^{2m-3} + \text{ꝛc.} = 0.$$

4) Es sey $n = 2m+1$. In diesem Falle hat man, wenn $\sqrt{t}$ für x gesetzt wird

$$(t^m + Bt^{m-1} + Dt^{m-2} + Ft^{m-3} + \text{ꝛc.})\sqrt{t}$$
$$= At^m + Ct^{m-1} + Et^{m-2} + \text{ꝛc.}$$

und wenn man die beyden Theile der Gleichung quadrirt und die Glieder gehörig ordnet, so erhält man die nämliche Gleichung wie in 3, außer daß $2m+1$ anstatt $2m$ kommt:

5) Man hat also für beyde Fälle der Gleichung

$$t^n + (2B - A^2)t^{n-1} + (2D - 2AC + B^2)t^{n-1}$$
$$+ (2F - 2AE + 2BD - C^2)t^{n-2} + \text{ꝛc.} = 0$$

Anmerk. Wenn man die Ausdrücke [2], [2²], [2³], ꝛc. nicht schon auf andere Art zu finden wüßte, so könnte man sie hierdurch unmittelbar finden, wenn man die Gleichungen in 1 und 5 gegen einander hält, und die Coefficienten gleicher Potenzen von t einander gleich setzt. Man erhält nämlich alsdann

$$-[2] = 2B - A^2$$
$$[2^2] = 2D - 2AC + B^2$$
$$-[2^3] = 2F - 2AE + 2BD - C^2$$
$$[2^4] = 2H - 2AG + 2BF - 2CF + D^2$$
$$\text{ꝛc.}$$

woraus das Gesetz leicht zu erkennen ist.)

Bezeichnet man die Coefficienten der gegebenen Gleichung, um die Stellen anzudeuten, welche sie in derselben einnehmen, durch $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, ꝛc. anstatt durch A, B, C, D, ꝛc., so wird das Gesetz noch sichtbarer. Man hat nämlich alsdann

$$-[2] = 2\overset{2}{A} - \overset{1}{A}\overset{1}{A}$$

$$[2^2] = 2\overset{4}{A} - 2\overset{3}{A}\overset{1}{A} + \overset{2}{A}\overset{2}{A}$$

$$-[2^3] = 2\overset{6}{A} - 2\overset{5}{A}\overset{1}{A} + 2\overset{4}{A}\overset{2}{A} - \overset{3}{A}\overset{3}{A}$$

$$[2^4] = 2\overset{8}{A} - 2\overset{7}{A}\overset{1}{A} + 2\overset{6}{A}\overset{2}{A} - 2\overset{5}{A}\overset{3}{A} + \overset{4}{A}\overset{4}{A}$$

und im Allgemeinen

$$\pm[2^n] = 2\overset{2n}{A} - 2\overset{2n-1}{A}\overset{1}{A} + 2\overset{2n-2}{A}\overset{2}{A} - 2\overset{2n-3}{A}\overset{3}{A} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \mp \overset{n+1}{A}\overset{n-1}{A} \pm \overset{n}{A}\overset{n}{A}$$

das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n.

Euler braucht diese Formeln zur Entdeckung der unmöglichen Wurzeln in einer Gleichung (Vollst. Anl. zur Differ. Rechn. übers. von Michelsen Th. III. S. 135), giebt aber keinen Beweis derselben, sondern sagt bloß, daß sie sich durch die Lehre von den Combinationen finden lassen. Einen von dem obigen verschiedenen Beweis dieser Formeln findet man in Klügels mathematisches Wörterbuch, Art. Combination, S. 469 u. f.

§ 43.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

die Gleichung für die mten Potenzen ihrer Wurzeln zu finden.

Aufl. Die Wurzeln der gesuchten Gleichung sind x'^m, x''^m, x'''^m, ꝛc. Hieraus erhält man auf eine ähnliche Art, wie im vor. §, die Gleichung

$$t^n - [m]t^{n-1} + [m^2]t^{n-2} - [m^3]t^{n-3} + [m^4]t^{n-4} - \ldots$$

$$\ldots\ldots \pm [m^{n-1}]t \mp [m^n] = 0$$

Die Summenausdrücke, welche hier vorkommen, sind sämmtlich von der Form $[\alpha^a]$ und lassen sich also sehr leicht finden.

§ 44.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{rc.} = 0$$

die Gleichung für die Differenzen ihrer Wurzeln zu finden.

Aufl. 1) Die Anzahl der verschiedenen Werthe, welche die Funktion $x' - x''$ durch die Vertauschung und Versetzung der Wurzeln erhalten kann, ist der Anzahl der Variationen (in dem Sinne, wie Hindenburg dieses Wort nimmt) von n verschiedenen Dingen zur zweyten Classe gleich, also $= n.n-1$. Die gesuchte Gleichung wird also von dem Grade $n . n - 1$ seyn. Es erhellet ferner aus § 36, daß diese Gleichung nur gerade Potenzen von t enthalten werde, und daß sie daher, wenn man, der Kürze wegen, $n . n - 1 = 2m$ setzt, die folgende Form haben wird:

$$t^{2m} - A't^{2m-2} + B't^{2m-4} - C't^{2m-6} + \text{rc.} = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung werden $(x'-x'')^2$, $(x'-x''')^2$, $(x'-x^{iv})^2$, rc., $(x''-x''')^2$, $(x''-x^{iv})^2$, rc. rc. seyn.

Die Coefficienten A', B', C', rc. ließen sich nun zwar auf dieselbe Weise, wie in § 36, bestimmen, jedoch würde die Fortsetzung der Rechnung nach dieser Methode mit vielen Schwierigkeiten verknüpft seyn, und überdies das Gesetz der Glieder nicht leicht erkennen lassen. Das folgende Verfahren, welches in der Folge häufig seine Anwendung finden wird, ist einfacher und allgemeiner.

2) Man setze zu dem Ende

$$S1 = (x'-x'')^2 + (x'-x''')^2 + (x'-x^{iv})^2 + \ldots + (x''-x''')^2 + \ldots$$

$$S2 = (x'-x'')^4 + (x'-x''')^4 + (x'-x^{iv})^4 + \ldots + (x''-x''')^4 + \ldots$$

$$S3 = (x'-x'')^6 + (x'-x''')^6 + (x'-x^{iv})^6 + \ldots + (x''-x''')^6 + \ldots$$

rc.

so sind die Ausdrücke S1, S2, S3, rc. nichts anders als die Summe, die Summe der Quadrate, die Summe der Cuben, u. s. w. von den Wurzeln der Gleichung für t.

3) Da die Ausdrücke S1, S2, S3, ꝛc. für die transformirte Gleichung das Nämliche sind, als die Ausdrücke [1], [2], [3], ꝛc. für die gegebene Gleichung, so gelten die in § 9 gefundenen Formeln auch für die Coefficienten A′, B′, C′, ꝛc., wenn man nur überall S1, S2, S3, ꝛc. für [1], [2], [3], ꝛc., und zugleich − A′, + B′, − C′, ꝛc. für A, B, C, ꝛc. setzt. Man hat nämlich

$$A' = S1$$

$$B' = \frac{A'S1 - S2}{2}$$

$$C' = \frac{B'S1 - A'S2 + S3}{3}$$

$$D' = \frac{C'S1 - B'S2 + A'S3 - S4}{4}$$

ꝛc.

Hätte man also die Ausdrücke S1, S2, S3, ꝛc. berechnet, so könnte man vermittelst dieser Gleichungen die Coefficienten A′, B′, C′, D′, ꝛc. finden.

4) Werden die Ausdrücke S1, S2, S3, ꝛc. entwickelt, so erhält man

$$S1 = (n-1)(x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \text{ꝛc.}) - 2(x'x'' + x'x''' + x''x''' + \text{ꝛc.})$$
$$= (n-1)[2] - 2[1^2]$$

$$S2 = (n-1)(x'^4 + x''^4 + x'''^4 + \text{ꝛc.}) - 4(x'x''^3 + x'^3x'' + x'x'''^3 + x'^3x''' + x''x'''^3 + x''^3x''' + \text{ꝛc.}) + 6(x'^2x''^2 + x'^2x'''^2 + x''^2x'''^2)$$
$$= (n-1)[4] - 4[13] + 6[2^2]$$

$$S3 = (n-1)(x'^6 + x''^6 + x'''^6 + \text{ꝛc.}) - 6(x'x''^5 + x'^5x'' + x'x'''^5 + x'^5x''' + x''x'''^5 + x''^5x''' + \text{ꝛc.}) + 15(x'^2x''^4 + x'^4x''^2 + x'^2x'''^4 + x'^4x'''^2 + x''^2x'''^4 + x''^4x'''^2 + \text{ꝛc.}) - 20(x'^3x''^3 + x'^3x'''^3 + x''^3x'''^3 + \text{ꝛc.})$$
$$= (n-1)[6] - 6[15] + 15[24] - 20[3^2]$$

ꝛc.

Diese Werthe von S_1, S_2, S_3, ꝛc. dürfen also nur in den Gleichungen in 3 substituirt werden, um die Coefficienten A′, B′, C′, ꝛc. zu finden.

5) Es lassen sich aber auch diese Werthe, wenn man will, vermittelst der beyden Gleichungen

$$[\alpha\beta] = [\alpha][\beta] - [\alpha+\beta]$$

$$2[\alpha^2] = [\alpha]^2 - [2\alpha]$$

auf bloße Potenzensummen reduciren, und alsdann erhält man

$$S_1 = (n-1)[2] - 2\left(\frac{[1]^2 - [2]}{2}\right)$$

$$S_2 = (n-1)[4] - 4([1][3] - [4]) + 6\left(\frac{[2]^2 - [4]}{2}\right)$$

$$S_3 = (n-1)[6] - 6([1][5] - [6]) + 15([2][4] - [6]) - 20\left(\frac{[3]^2 - [6]}{2}\right)$$

ꝛc.

oder nach der gehörigen Reduktion,

6)

$$S_1 = n[2] - 2\frac{[1]^2}{2}$$

$$S_2 = n[4] - 4[3][1] + 6\frac{[2]^2}{2}$$

$$S_3 = n[6] - 6[5][1] + 15[4][2] - 20\frac{[3]^2}{2}$$

und im Allgemeinen

$$S\mu = n[2\mu] - 2\mu[2\mu-1][1] + \frac{2\mu\,.\,2\mu-1}{1\,.\,2}[2\mu-2][2] - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{2\mu\,.\,2\mu-1\,.\,2\mu-2\,.\,.\,.\,.\,.\,\mu+1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,\mu}\,\frac{[\mu]^2}{2}$$

Diese Formeln werden uns in der Folge bey der Lehre von den imaginären Wurzeln der Gleichungen von großem Nutzen seyn.

Anmerk. Aus den Lehrbüchern der Algebra ist bekannt,

daß, wenn man in der Gleichung $x^n - Ax^{n-1} +$ ꝛc., $x + \frac{A}{n}$ für x substituirt, das zweyte Glied derselben wegfalle. Da nun aber durch diese Substitution alle Wurzeln dieser Gleichung um die Größe $\frac{A}{n}$ im algebraischen Sinne vermindert werden, so bleiben ihre Differenzen ungeändert, und es muß daher auch die Differenzengleichung ungeändert bleiben. Man erlangt aber durch das Wegschaffen des zweyten Gliedes den Vortheil, daß die Werthe der Ausdrücke [1], [2], [3], ꝛc. S_1, S_2, S_3, ꝛc. um ein Beträchtliches einfacher werden. Man hat nämlich alsdann

$$[1] = 0$$
$$[2] = -2B$$
$$[3] = 3C$$
$$[4] = 2B^2 - 4D$$
$$[5] = -5BC + 5E$$
$$[6] = -2B^3 + 3C^2 + 6BD$$
ꝛc.

Ferner aus 6, weil [1] = 0,

$$S_1 = n[2]$$
$$S_2 = n[4] + 3[2]^2$$
$$S_3 = n[6] + 15[4][2] - 10[3]^2$$
ꝛc.

Diese Formeln können in dem Falle mit Nutzen gebraucht werden, wenn in den Werthen von S_1, S_2, S_3, ꝛc., welche in 4 gefunden worden, solche Summenausdrücke vorkommen, welche die Gränzen der angehängten Tafeln überschreiten. Ist dies nicht der Fall, so würde man besser thun jene Formeln beyzubehalten.

§ 45.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

die Gleichung für die Summen von je zwey und zwey ihrer Wurzeln zu finden.

Aufl. 1) Die gesuchte Gleichung muß die folgenden Wurzeln haben:

$$x'+x'',\ x'+x''',\ x'+x^{\prime v},\ \ldots\ x''+x''',\ x''+x^{\prime v}\ \ldots\ldots$$

und die Anzahl dieser Wurzeln ist der Anzahl der Combinationen von n Dingen zur zweyten Classe gleich, also $= \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2}$, wofür ich der Kürze wegen m setzen will. Die gesuchte Gleichung wird daher vom m ten Grade seyn; sie werde durch

$$t^m - A' t^{m-1} + B' t^{m-2} - C' t^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

vorgestellt. Die Coefficienten A', B', C', ꝛc. können nun am leichtesten nach der im vor. § angewandten Methode bestimmt werden.

2) Zu dem Ende setze man

$$S1 = (x'+x'') + (x'+x''') + (x'+x^{\prime v}) + \ldots + (x''+x''') + \ldots$$
$$S2 = (x'+x'')^2 + (x'+x''')^2 + (x'+x^{\prime v})^2 + \ldots + (x''+x''')^2 + \ldots$$
$$S3 = (x'+x'')^3 + (x'+x''')^3 + (x'+x^{\prime v})^3 + \ldots + (x''+x''')^3 + \ldots$$

ꝛc.

so daß die Ausdrücke S1, S2, S3, ꝛc. die Summen der ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Potenzen der Wurzeln bezeichnen. Hat man die Werthe dieser Ausdrücke auf irgend eine Art bestimmt, so geben die Gleichungen in 3 des vor. §'s die Coefficienten A', B', C', ꝛc.

3) Entwickelt man aber diese Ausdrücke, so findet man

$$S1 = (n-1)\,[1]$$
$$S2 = (n-1)\,[2] + 2[1^2]$$
$$S3 = (n-1)\,[3] + 3[1\,2]$$
$$S4 = (n-1)\,[4] + 4[1\,3] + 6[2^2]$$
$$S5 = (n-1)\,[5] + 5[1\,4] + 10[2\,3]$$

ꝛc.

woraus sich das Gesetz sehr leicht erkennen läßt.

4) Will

4) Will man die Werthe der Ausdrücke S_1, S_2, S_3, ꝛc. unmittelbar in Potenzensummen darstellen, so darf man nur wie in 5 des vor. §'s verfahren. Man erhält alsdann

$$S_1 = (n-1)\,[1]$$

$$S_2 = (n-1)\,[2] + 2\left(\frac{[1]^2 - [2]}{2}\right)$$

$$S_3 = (n-1)\,[3] + 3([1][2] - [3])$$

$$S_4 = (n-1)\,[4] + 4([1][3] - [4]) + 6\left(\frac{[2]^2 - [4]}{2}\right)$$

$$S_5 = (n-1)\,[5] + 5([1][4] - [5]) + 10([2][3] - [5])$$

ꝛc.

oder nach der gehörigen Reduktion

$$S_1 = (n-1)[1]$$

$$S_2 = (n-2)[2] + 2\frac{[1]^2}{2}$$

$$S_3 = (n-2^2)[3] + 3[2][1]$$

$$S_4 = (n-2^3)[4] + 4[3][1] + 6\frac{[2^2]}{2}$$

$$S_5 = (n-2^4)[5] + 5[4][1] + 10[3][2]$$

ꝛc.

und im Allgemeinen

$$S\mu = (n-2^{\mu-1})[\mu] + \mu[\mu-1][1] + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}[\mu-2][2]$$

$$+ \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}[\mu-3][3] + \ldots\ldots$$

und das letzte Glied dieser Reihe ist entweder

$$\frac{\mu.\mu-1.\mu-2\ldots\ldots\frac{\mu}{2}+1}{1.\;2.\;3.\ldots\ldots\frac{\mu}{2}}\;\frac{[\frac{\mu}{2}]}{2}$$

oder

$$\frac{\mu.\mu-1.\mu-2\ldots\frac{\mu+3}{2}}{1.\;2.\;3.\ldots\frac{\mu-1}{2}}\;[\frac{\mu+1}{2}]\;[\frac{\mu-1}{2}]$$

nachdem μ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Die Abkürzungen in der Anmerk. zum vor. § lassen sich übrigens auch hier anbringen.

§ 46.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{rc.} = 0$$

die Gleichung für die Funktion $(ax' + bx'')^p$ zu finden, wenn p eine ganze positive Zahl ist.

Aufl. 1) Da man in der Funktion $(ax' + bx'')^p$ für die Wurzeln x', x'', jede andere Wurzel der gegebenen Gleichung setzen kann, so ist die Anzahl der Werthe, welche die Funktion erhalten kann $= n \cdot n - 1$, wofür ich m setzen will. Die gesuchte Gleichung ist daher nur von dem mten Grade, und kann folglich durch die Gleichung

$$t^m - A't^{m-1} + B't^{m-2} - C't^{m-3} + \text{rc.} = 0$$

vorgestellt werden.

2) Das in den beyden vorhergehenden §en zur Bestimmung der Coefficienten A', B', C', rc. angewandte Verfahren läßt sich auch hier anbringen. Bezeichnet man nämlich durch S_1, S_2, S_3, rc. die Summe der ersten, der zweyten, der dritten, u. s. w. Potenzen von den Wurzeln der transformirten Gleichung, so hat man

$$S_1 = (ax' + bx'')^p + (ax'' + bx')^p + (ax' + bx''')^p + \dots$$
$$S_2 = (ax' + bx'')^{2p} + (ax'' + bx')^{2p} + (ax' + bx''')^{2p} + \dots$$
$$S_3 = (ax' + bx'')^{3p} + (ax'' + bx')^{3p} + (ax' + bx''')^{3p} + \dots$$
rc.

Hat man diese Ausdrücke bestimmt, so geben die Gleichungen in 3. § 44 die Werthe der Coefficienten A', B', C', rc. Es ist schon hinlänglich, bloß den Ausdruck S_1 zu bestimmen; denn ist dieser gefunden, so erhält man die übrigen S_2, S_3, , wenn man successive 2p, 3p, rc. für p substituirt.

Den Zweck, S_1 zu bestimmen, erreicht man am leichtesten auf dem folgenden Wege.

3) Man mache den neuen Ausdruck .... (φ) ....
$\Sigma = (ax' + bz)^p + (ax'' + bz)^p + (ax''' + bz)^p + (ax^{IV} + bz)^p +$ ꝛc.
wo z für jetzt noch irgend eine unbestimmte Größe bezeichnet. Entwickelt man diesen Ausdruck mittelst des binomischen Lehrsatzes nach Potenzen von z, so erhält man

$$\Sigma = a^p (x'^p + x''^p + x'''^p + x^{IV p} + \text{ꝛc.}) + p a^{p-1} b (x'^{p-1} + x''^{p-1} + x'''^{p-1} + x^{IV p-1} \text{ ꝛc.}) z + \text{ꝛc.}$$

oder ..... (ψ) .....

$$\Sigma = a^p[p] + p a^{p-1} b[p-1] \,.\, z + \frac{p \cdot p-1}{1 \,.\, 2} a^{p-2} b^2 [p-2] \,.\, z^2 + \text{ꝛc.}$$

Diese Gleichung muß immer richtig bleiben, was man auch für z setzen mag.

4) Setzt man nun successive x', x'', x''', x^{IV}, ꝛc. für z, und bezeichnet das, was dadurch aus Σ wird, durch Σ', Σ'', Σ''', Σ^{IV}, ꝛc., so hat man zuerst aus der Gleichung (φ)

$$\Sigma' = (a+b)^p x'^p + (ax'' + bx')^p + (ax''' + bx')^p + \text{ꝛc.}$$
$$\Sigma'' = (ax' + bx'')^p + (a+b)^p x''^p + (ax''' + bx'')^p + \text{ꝛc.}$$
$$\Sigma''' = (ax' + bx''')^p + ax'' + bx''')^p + (a+b)^p x'''^p + \text{ꝛc.}$$
ꝛc.

Hieraus ergiebt sich, daß

$$\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' + \text{ꝛc.} = (a+b)^p [p] + S_1$$

Ferner erhält man aus der Gleichung (ψ)

$$\Sigma' = a^p[p] + p a^{p-1} b [p-1] \,.\, x' + \frac{p \cdot p-1}{1 \,.\, 2} a^{p-2} b^2 [p-2] \,.\, x'^2 + \text{ꝛc.}$$

$$\Sigma'' = a^p[p] + p a^{p-1} b [p-1] \,.\, x'' + \frac{p \cdot p-1}{1 \,.\, 2} a^{p-2} b^2 [p-2] \,.\, x''^2 + \text{ꝛc.}$$

$$\Sigma''' = a^p[p] + p a^{p-1} b [p-1] \,.\, x''' + \frac{p \cdot p-1}{1 \,.\, 2} a^{p-2} b^2 [p-2] \,.\, x'''^2 + \text{ꝛc.}$$
ꝛc.

und hieraus

$$\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' + \text{ꝛc.} =$$

$$na^p[p] + pa^{p-1}b[p-1][1] + \frac{p.p-1}{1.2}a^{p-2}b^2[p-2][2] + \text{ꝛc.}$$

5) Setzt man die beyden für $\Sigma' + \Sigma'' + \Sigma'''$, ꝛc. gefundenen Werthe einander gleich, so erhält man

$$(a+b)^p[p] + S_1 =$$

$$na^p[p] + pa^{p-1}b[p-1][1] + \frac{p.p-1}{1.2}a^{p-2}b^2[p-2][2] + \text{ꝛc.}$$

und hieraus

$$S_1 = (na^p - (a+b)^p)[p] + pa^{p-1}b[p-1][1] +$$

$$\frac{p.p-1}{1.2}a^{p-2}b^2[p-2][2] + \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3}a^{p-3}b^3[p-3][3]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{p.p-1.p-2\ldots1}{1.2.3\ldots p}b^p[0][p]$$

6) Vereinigt man in diesem Ausdrucke von S_1 das erste und letzte Glied, das zweyte und vorletzte, und überhaupt jede zwey Glieder, von denen das eine eben so weit von dem ersten, als das andere von dem letzten entfernt ist, und erinnert man sich dabey, daß $[0] = x'^0 + x''^0 + x'''^0 + \text{ꝛc.} = n$, so erhält man

$$S_1 = (n(a^p + b^p) - (a+b)^p)[p] +$$

$$p(a^{p-1}b + ab^{p-1})[p-1][1] +$$

$$\frac{p.p-1}{1.2}(a^{p-2}b^2 + a^2b^{p-2})[p-2][2] +$$

$$\frac{p.p-1.p-2}{1.2.3}(a^{p-3}b^3 + a^3b^{p-3})[p-3][3] +$$

ꝛc.

Das letzte Glied dieses Ausdrucks ist, wenn p eine gerade Zahl ist,

$$\frac{p \cdot p-1 \ldots \frac{p}{2}+1}{1 \cdot 2 \ldots \ldots \frac{p}{2}} a^{\frac{p}{2}} b^{\frac{p}{2}} [\frac{p}{2}]$$

Ist aber p eine ungerade Zahl, so ist das letzte Glied

$$\frac{p \cdot p-1 \ldots \frac{p+3}{2}}{1 \cdot 2 \ldots \frac{p-1}{2}} (a^{\frac{p+1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} + a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p+1}{2}}) [\frac{p+1}{2}] [\frac{p-1}{2}]$$

7) Wenn man nun in diesem Ausdrucke von S_1 successive $2p$, $3p$, $4p$, ꝛc. für p substituirt, so erhält man die Werthe der Ausdrücke S_2, S_3, S_4, ꝛc., und die Substitution dieser Werthe in den Formeln in 3. § 44 giebt die Werthe der angenommenen Coefficienten A′, B′, C′, ꝛc.

§ 47.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

die Gleichung für die Funktion $(ax' + bx'')^p$ zu finden, wenn p eine ganze positive Zahl ist.

Aufl. Aus der im vor. § gefundenen Gleichung für t, welche die Wurzeln $(ax'+bx'')^p$, $(ax''+bx')^p$, $(ax'+bx''')^p$, ꝛc. hat, läßt sich eine andere herleiten, welche die reciproken Wurzeln $(ax' + bx'')^{-p}$, $(ax'' + bx')^{-p}$, $(ax' + bx''')^{-p}$, ꝛc. hat (§ 10), und diese wird die Gleichung seyn, welche hier gesucht wird.

§ 48.

Aus den vorhergehenden Aufgaben läßt sich zur Genüge ersehen, wie man zu verfahren habe, um die Gleichung zu finden, von welcher eine gegebene Funktion von den Wurzeln einer Gleichung abhängt. Es kommt nämlich dabei einzig und allein auf die nachstehenden zwey Punkte an:

1) Alle mögliche Werthe zu finden, deren die gegebene Funktion fähig ist.

2) Aus diesen Werthen die gesuchte Gleichung zu bilden.

Ich werde mich zuerst mit dem ersten Punkte beschäftigen.

Um alle mögliche Werthe einer Funktion zu finden, muß man die Wurzeln, welche in derselben vorkommen, auf so vielerlei Arten, als es sich thun läßt, mit den andern Wurzeln der gegebenen Gleichung und unter sich selbst vertauschen, und von allen durch diese Operation erhaltenen Resultaten oder Werthen nur diejenigen behalten, welche wirklich von einander verschieden sind.

Befinden sich in einer Funktion die sämmtlichen Wurzeln einer gegebenen Gleichung, so darf man diese Wurzeln nur auf alle mögliche Arten permutiren. Ist also der Grad der gegebenen Gleichung $= n$, so kann eine solche Funktion im Allgemeinen $1 . 2 . 3 . \ldots . n$, Werthe erhalten, weil sich n Dinge so viel mal versetzen lassen. Ist aber die Form der Funktion von der Beschaffenheit, daß mehrere Versetzungen gleiche Resultate erzeugen, so ist die Zahl der Werthe oft weit geringer, und werden alle Werthe einander gleich, so ist die Funktion symmetrisch.

Befindet sich in der Funktion nur eine Anzahl μ von den n Wurzeln der gegebenen Gleichung, so können diese n Wurzeln auf so viele verschiedene Arten in die Funktion gebracht werden, als sich n Dinge zur μten Classe kombiniren lassen, und die Anzahl dieser Combinationen ist

$$= \frac{n . \overline{n-1} . \overline{n-2} \ldots \overline{n-\mu+1}}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots \mu}$$

Jede solche Combination gestattet aber $1 . 2 . 3 \ldots\ldots \mu$ Versetzungen unter den dazu gehörigen Wurzeln; folglich ist die Anzahl der Werthe, welche eine solche Funktion im Allgemeinen erhalten kann,

$= n . n-1 . n-2 \ldots\ldots n-\mu+1$

d. h. sie ist der Anzahl der Variationen von n Dingen zur μten Classe gleich. Befinden sich aber gleiche Werthe darunter, so wird diese Anzahl auch hier oft um vieles geringer; jedoch kann sie in dem vorausgesetzten Falle nie kleiner als n werden, weil die Anzahl der Variationen nie geringer als die Anzahl der zu variirenden Elemente seyn kann. Die transformirte Gleichung kann daher in diesem Falle auch nie von einem niedrigern Grade seyn, als die gegebene selbst.

Bey den allgemeinen Untersuchungen über die Funktionen ist es immer vorauszusetzen erlaubt, daß die sämmtlichen Wurzeln der gegebenen Gleichung darin enthalten seyen, weil man, im entgegengesetzten Falle, nur jede der fehlenden Wurzeln mit einem Coefficienten $= 0$ versehen der Funktion zusetzen darf.

§ 49.

Erklärung. 1) Funktionen sollen gleichartig heißen, wenn sie dieselben Wurzeln enthalten, und bey allen Versetzungen dieser Wurzeln sich zugleich ändern oder zugleich ungeändert bleiben.

Es sind also z. B. die Funktionen

$$x' + x'' - x''' - x^{iv},\ x'x'' - x'''x^{iv}$$

desgleichen die Funktionen

$$\frac{x''}{x'''} + \frac{x'''}{x'} + \frac{x'}{x''},\ x'^p x''^q x'''^r + x''^p x'''^q x'^r + x'''^p x'^q x''^r$$

gleichartig. Denn die ersten beyden haben nicht mehr als folgende sechs verschiedene und korrespondirende Werthe:

$$x' + x'' - x''' - x^{iv},\ x'x'' - x'''x^{iv}$$
$$x' + x''' - x'' - x^{iv},\ x'x''' - x''x^{iv}$$
$$x' + x^{iv} - x'' - x''',\ x'x^{iv} - x''x'''$$
$$x''' + x^{iv} - x' - x'',\ x'''x^{iv} - x'x''$$
$$x'' + x^{iv} - x' - x''',\ x''x^{iv} - x'x'''$$
$$x'' + x''' - x' - x^{iv},\ x''x''' - x'x^{iv}$$

und die beyden letzten nicht mehr als zwey, nämlich:

$$\frac{x''}{x'''}+\frac{x'''}{x'}+\frac{x'}{x''},\quad {x'}^{p}{x''}^{q}{x'''}^{r}+{x''}^{p}{x'''}^{q}{x'}^{r}+{x'''}^{p}{x'}^{q}{x''}^{r}$$

$$\frac{x'''}{x''}+\frac{x''}{x'}+\frac{x'}{x'''},\quad {x'}^{p}{x'''}^{q}{x''}^{r}+{x'''}^{p}{x''}^{q}{x'}^{r}+{x''}^{p}{x'}^{q}{x'''}^{r}$$

2) Der Buchstabe f, den Wurzeln einer Gleichung oder auch andern Größen vorgesetzt, soll hier in der Folge immer eine rationale Funktion dieser Wurzeln oder Größen bezeichnen. Es bedeutet also z. B. $f:(x')$ eine rationale Funktion von x', $f:(x')(x'')$ eine rationale Funktion von x' und x'', und im Allgemeinen $f:(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})\ldots(x^{(\mu)})$ eine rationale Funktion von $x', x'', x''', x^{\prime v}, \ldots x^{(\mu)}$, und so auch mit andern Größen. Um die Funktionen zu unterscheiden, werden auch bisweilen die Buchstaben F, φ, ψ, anstatt f gebraucht werden.

Bey dieser Bezeichnung der Funktionen kommt es vorzüglich darauf an, mit jeder Zelle ( ), welche auf den Buchstaben f folgt, eine gewisse Vorstellung von der Art, wie die darin befindliche Größe mit den andern verbunden ist, zu verknüpfen, so daß man sich, wenn irgend eine Versetzung dieser Größen unter dem Zeichen f vorgenommen wird, eine derselben entsprechende Versetzung in dem dadurch bezeichneten Ausdrucke vorstellen muß.

Wäre z. B. $f:(x')(x'')(x''')=(x'x''-x''')(x''-x')$, so hätte man

$$f:(x')(x''')(x'')=(x'x'''-x'')(x'''-x')$$
$$f:(x'')(x')(x''')=(x''x'-x''')(x'-x'')$$
$$f:(x'')(x''')(x')=(x''x'''-x')(x'''-x'')$$
$$f:(x''')(x')(x'')=(x'''x'-x'')(x'-x''')$$
$$f:(x''')(x'')(x')=(x'''x''-x')(x''-x''')$$

5) Um die Werthe an sich, welche eine gegebene Funktion durch die Versetzung der darin befindlichen Größen erhält, von den Zeichen, wodurch diese Versetzung angedeutet wird, zu unterscheiden, will ich die Letzteren Typen oder Vorbilder nennen. Es giebt also z. B. die Funktion $f:(x')(x'')(x''')$ sechs Typen, nämlich: $f:(x')(x'')(x''')$, $f:(x')(x''')(x'')$, $f:(x'')(x')(x''')$, $f:(x'')(x''')(x')$, $f:(x''')(x')(x'')$, $f:(x''')(x'')(x')$; und überhaupt giebt es immer so viele Typen einer Funktion als Versetzungen der Größen unter dem Funktionszeichen.

Die Typen sind also gleichsam die Repräsentanten der Werthe, welche eine Funktion erhalten kann, und können bey allgemeinen Untersuchungen über die Funktionen mit vorzüglichem Nutzen gebraucht werden. Wollte man z. B. anzeigen, daß irgend eine partikuläre Funktion eine solche Form habe, daß die aus diesen oder jenen Versetzungen entspringenden Werthe einander gleich werden, so darf man nur, anstatt diese Versetzungen wörtlich anzuzeigen, welches oft nicht wenig Weitläufigkeit verursachen würde, bloß die Typen nennen, welche den gleichen Werthen korrespondiren.

§ 50.

Wenn eine Funktion eine solche Form hat, daß irgend zwey ihrer Werthe einander gleich werden, so muß die Funktion nothwendig immer mehr als zwey gleiche Werthe haben. Wäre z. B. die Funktion von einer solchen Beschaffenheit, daß

$$f:(x')(x'')(x''') = f:(x')(x''')(x'')$$

so muß auch seyn

$$f:(x'')(x')(x''') = f:(x'')(x''')(x')$$
$$f:(x''')(x')(x'') = f:(x''')(x'')(x')$$

Denn die erste Gleichung giebt zu erkennen, daß der Werth des Typen f: $(x')(x'')(x''')$ ungeändert bleibt, wenn man die Wurzeln der beyden letzten Zellen verwechselt; es müssen also die Typen f: $(x'')(x')(x''')$, f: $(x''')(x')(x'')$ bey der nämlichen Wechselung der Zellen ungeändert bleiben, weil die Gleichheit in dem Sinne, wie dieses Wort hier genommen wird, nach welchem es so viel als Identität bedeutet, nicht von der quantitativen Beschaffenheit der Wurzeln, sondern bloß von der Art ihrer Verbindung, d. h. von der Form der Funktionen herrührt.

§ 51.

Hülfssatz. Wenn man eine Reihe von Elementen a, b, c, d, e, ... p, mit eben so vielen, in einer beliebigen Ordnung gesetzten Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 . . . . . π nach Art eines Zeigers verbindet, etwa wie folgt:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & \ldots & \pi \\ a & b & c & d & e & f & g & h & i & \ldots & p \end{matrix}$$

hierauf die Elemente so permutirt, wie die drüber gesetzten Stellenzahlen anzeigen, und aus der erhaltenen Complexion eine andere, aus dieser wieder eine andere, und überhaupt aus einer jeden zuletzt gefundenen Complexion immer wieder eine neue ableitet, indem man bey dem Versetzen jedesmal die Regel beobachtet, welche die Stellenzahlen anzeigen: so behaupte ich, daß man beim fortgesetzten Permutiren nothwendig wieder einmal zur ersten Complexion zurückkommen muß.

So z. B. erhält man aus der Complexion $A_1 = \overset{5\,8\,3\,2\,1\,4\,7\,9\,6}{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i}$ für den drüber gesetzten Zeiger nicht mehr als neun Complexionen A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}

	5 8 3 2 1 4 7 9 6
A_1	= a b c d e f g h i
A_2	= e f c b a d g i h
A_3	= a i c h e b g f d
A_4	= e f c i a h g d b
A_5	= a d c f e i g b h
A_6	= e b c d a f g h i
A_7	= a h c b e d g i f
A_8	= e i c h a b g f d
A_9	= a f c i e h g d b
A_{10}	= e d c f a i g b h

Behandelt man die letzte Complexion eben so, wie die vorhergehenden, so erhält man wieder die erste.

Bew. Es sollen

$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots A_\mu, \ldots\ldots A_\nu, \ldots\ldots$

die Complexionen bezeichnen, welche successive aus der Complexion A_1 = a b c d e f . . . . p nach der Regel irgend eines Zeigers abgeleitet werden können.

Da die Zahl der Versetzungen, welche eine Complexion überhaupt erleiden kann, immer begränzt ist, so muß man nothwendig einmal zu einer Complexion A_ν kommen, welche einer der vorhergehenden, A_μ, gleich ist. Ist aber $A_\nu = A_\mu$, so muß auch $A_{\nu-1} = A_{\mu-1}$ seyn; denn wären die Complexionen $A_{\nu-1}$, $A_{\mu-1}$, nicht einander gleich, so könnten auch die Complexionen A_ν, A_μ, nicht einander gleich seyn, da A_ν aus $A_{\nu-1}$ durch dieselbe Stellenwechselung der Elemente entstehet, durch welche A_μ aus $A_{\mu-1}$ entstehet. Auf die nämliche Art läßt sich ferner aus $A_{\nu-1} = A_{\mu-1}$ schließen, daß auch $A_{\nu-2} = A_{\mu-2}$, und hieraus wieder, daß $A_{\nu-3} = A_{\mu-3}$, u. s. w. Es muß daher auch $A_{\nu-(\mu-1)} = A_{\mu-(\mu-1)} = A_1$ seyn. Es giebt also eine Complexion $A_{\nu-(\mu-1)}$, welche der ersten gleich ist. W. Z. E. W.

Der Inbegriff sämmtlicher, nach einer gegebenen Versetzungs-Regel abgeleiteter Complexionen, soll der Kürze des Ausdrucks wegen eine **Periode** genannt werden, weil man immer dieselben Complexionen wieder erhält, man mag die Versetzung so weit fortsetzen, als man will.

§ 52.

Aus dem vorigen § ergeben sich folgende Sätze:

I. Alle Complexionen einer Periode sind von einander verschieden.

Denn gäbe es in der Periode $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots\ldots A_\mu \ldots\ldots A_\nu \ldots\ldots A_\omega$ zwey gleiche Complexionen A_μ, A_ν, so müßte auch $A_{\nu-1} = A_{\mu-1}$, $A_{\nu-2} = A_{\mu-2}$, u. s. w. seyn; also auch $A_{\nu-(\mu-1)} = A_{\mu-(\mu-1)} = A_1$; alsdann könnte aber A_ω nicht die letzte Complexion der Periode seyn.

II. Es bezeichne B_1 irgend eine von A_1 verschiedene Complexion, sie mag nun zu der Periode $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_\omega$ gehören, oder nicht; es seyen ferner B_2, B_3, B_4, rc., die aus B_1 nach der nämlichen Versetzungsregel abgeleiteten Complexionen, nach welcher A_2, A_3, A_4, rc. aus A_1 abgeleitet worden: ich behaupte, daß alsdann die beyden aus A_1 und B_1 entstandenen Perioden aus gleich vielen Complexionen bestehen werden.

Denn da die Regel der Versetzung, welche durch den Zeiger angegeben wird, es nicht mit den Elementen an sich, sondern bloß mit ihren Stellen zu thun hat, so ist es in Hinsicht auf die Zahl der Complexionen, woraus eine Periode bestehet, völlig gleichgültig, welche Elemente sich in den verschiedenen Stellen der ersten Complexion befinden.

III. Ist B_1 irgend einer von den Complexionen A_1, A_2, $A_3 \ldots\ldots A_\omega$ der ersten Periode gleich, so bestehen die beyden Perioden aus denselben Complexionen.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des vor. §'s.

IV. Ist B_1 keiner von den Complexionen $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\omega$ der ersten Periode gleich, so sind die Complexionen der beyden Perioden sämmtlich von einander verschieden.

Denn gäbe es in der Periode $B_1, B_2, B_3 \ldots B_\varkappa \ldots B_\omega$ irgend eine Complexion, welche einer Complexion A_μ aus der Periode $A_1, A_2, A_3 \ldots A_\mu \ldots A_\omega$ gleich wäre, so müßte auch $B_{\varkappa+1} = A_{\mu+1}$ seyn, weil $B_{\varkappa+1}$ von $B_\varkappa$ nach eben der Regel abgeleitet wird, als $A_{\mu+1}$ von A_μ, und wenn man auf diese Art weiter schließt, $B_{\varkappa+2} = A_{\mu+2}$, $B_{\varkappa+3} = A_{\mu+3}$, u. s. w., endlich $B_{\omega+1} = A_{\mu+\omega-\varkappa+1}$. Da aber $B_{\omega+1} = B_1$. $A_{\mu+\omega-\varkappa+1} = A_{\mu-\varkappa+1}$, so müßte $B_1 = A_{\mu-\varkappa+1}$ seyn, welches der Voraussetzung, daß B_1 von allen in der ersten Periode enthaltenen Complexionen verschieden sey, widerspricht.

§ 53.

Aufg. Eine Funktion sey von solcher Beschaffenheit, daß irgend zwey gegebene Typen einander gleich werden: man soll alle aus dieser Voraussetzung sich ergebenden gleichen Werthe der Funktion finden. (§ 50)

Aufl. Der Deutlichkeit wegen will ich mich an einem einzelnen Falle halten, weil man daraus hinlänglich erkennen wird, wie man sich in jedem andern Falle zu verhalten habe.

1) Es bezeichne

$$f : (x') (x'') (x''') (x^{IV}) (x^{V})$$

irgend eine Funktion, für welche die beyden Typen

$$A_1 \ldots\ldots f : (x') (x'') (x''') (x^{IV}) (x^{V})$$

$$A_2 \ldots\ldots f : (x''') (x^{IV}) (x^{V}) (x') (x'')$$

einander gleich werden. Man vergleiche diese Typen, und bemerke, wie die Wurzeln in der ersten, zweyten, dritten, vierten und fünften Zelle versetzt werden müssen, wenn A_2 aus A_1

entstehen soll. Diesen Stellenwechsel fasse man mit dem Gedächtnisse, und leite hierauf nach der nämlichen Versetzungsregel, durch welche A_2 aus A_1 erzeugt worden, von A_2 einen neuen Typen ab, von diesem wieder einen neuen, und fahre mit dieser successiven Ableitung so lange fort, bis man wieder zum ersten zurückkommt, so erhält man die nachstehende aus fünf Typen bestehende Periode:

A_1 . . . . f: $(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$
A_2 . . . . f: $(x''')(x^{iv})(x^{v})(x')(x'')$
A_3 . . . . f: $(x^{v})(x')(x'')(x''')(x^{iv})$
A_4 . . . . f: $(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x')$
A_5 . . . . f: $(x^{iv})(x^{v})(x')(x'')(x''')$

2) Diese Typen müssen nothwendig alle einander gleich seyn, weil sie sämmtlich nach einer und derselben Versetzungsregel von einander abgeleitet worden. Da nun die Funktion f: $(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$ gerade so viele Typen hat, als sich fünf Größen unter einander versetzen lassen, also 120 Typen, so kommt es nur noch darauf an, aus den übrigen 115 diejenigen herausziehen, welche durch die Voraussetzung $A_1 = A_2$ einander gleich werden.

3) Dieses kann aber sehr leicht geschehen. Denn man darf nur aus den übrigen Typen irgend einen nach Belieben herausheben, und von demselben nach eben der Versetzungsregel eine zweite Periode ableiten, hierauf aus den noch übrigen 110 Typen wieder einen herausheben, und nach der nämlichen Versetzungsregel eine dritte Periode bilden, und damit so lange fortfahren, bis keiner mehr übrig ist.

4) Auf diese Weise erhält man 24 Perioden, deren jede aus fünf gleichen Typen bestehet. Hat man aber diese gefunden, so lassen sich auch die ihnen korrespondirenden gleichen der Funktion selbst finden, sobald diese bekannt ist.

Beysp. Gesetzt man hätte bemerkt, daß die Funktion $x'x''^2x'''^3 + x'''{x^{\prime v}}^2{x^v}^3 + x^v x'^2 x''^3 + x''x'''^2{x^{\prime v}}^3 + x^{\prime v}{x^v}^2x'^3$ ungeändert bleibt, wenn man in den Stellen, wo sich die Wurzeln x', x'', x''', $x^{\prime v}$, x^v befinden, respective die Wurzeln x''', $x^{\prime v}$, x^v, x', x'' setzt, oder kürzer, daß $f:(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^v) = f:(x''')(x^{\prime v})(x^v)(x')(x'')$ sey. Da dieses gerade die Gleichung ist, welche zur Erläuterung des Verfahrens bey der Auflösung gebraucht wurde, so ist man gewiß, daß die Funktion 24 mal fünf gleiche Werthe habe. So z. B. giebt die Periode in 1 die folgenden fünf Werthe:

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^v) =$$
$$x'x''^2x'''^3 + x'''{x^{\prime v}}^2{x^v}^3 + x^v x'^2 x''^3 + x''x'''^2{x^{\prime v}}^3 + x^{\prime v}{x^v}^2x'^3$$
$$f:(x''')(x^{\prime v})(x^v)(x')(x'') =$$
$$x'''{x^{\prime v}}^2{x^v}^3 + x^v x'^2 x''^3 + x''x'''^2{x^{\prime v}}^3 + x^{\prime v}{x^v}^2x'^3 + x'x''^2x'''^3$$
$$f:(x^v)(x')(x'')(x''')(^{\prime v}) =$$
$$x^v x'^2 x''^3 + x''x'''^2{x^{\prime v}}^3 + x^{\prime v}{x^v}^2x'^3 + x'x''^2x'''^3 + x'''{x^{\prime v}}^2{x^v}^3$$
$$f:(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^v)(x') =$$
$$x''x'''^2{x^{\prime v}}^3 + x^{\prime v}{x^v}^2x'^3 + x'x''^2x'''^3 + x'''{x^{\prime v}}^2{x^v}^3 + x^v x'^2 x''^3$$
$$f:(x^{\prime v})(x^v)(x')(x'')(x''') =$$
$$x^{\prime v}{x^v}^2x'^3 + x'x''^2x'''^3 + x'''{x^{\prime v}}^2{x^v}^3 + x^v x'^2 x''^3 + x''x'''^2{x^{\prime v}}^3$$

welche sichtbar alle einander gleich sind.

§ 54.

Aufg. Eine Funktion sey von solcher Beschaffenheit, daß mehr als zwey ihrer Typen einander gleich werden: man soll die gleichen Werthe dieser Funktion finden.

Aufl. Es sollen A, B, C, D, ꝛc. die Typen bezeichnen, welche der Voraussetzung nach einander gleich werden. Um nun hieraus die gleichen Werthe zu finden, verfahre man wie folgt.

1) Man permutire zuerst den Typen A oder auch irgend einen anderen, nach der Versetzungsregel A = B, wie im vor.

§ gelehrt worden. Die Periode, welche man daraus erhält, bestehe aus μ Typen, so hat man schon μ gleiche Typen.

2) Hierauf permutire man jeden dieser μ Typen insbesondere nach der Versetzungsregel $A=C$. Ich will annehmen, sie gebe μ' Typen, so hat man überhaupt $\mu\mu'$ Typen, die sämmtlich einander gleich seyn werden.

3) Man permutire hierauf wieder von neuem jeden der erhaltenen $\mu\mu'$ Typen nach der Versetzungsregel $A=D$, die μ'' Typen geben mag; so hat man in allem $\mu\mu'\mu''$ gleiche Typen.

4) Auf die nämliche Art fahre man weiter fort, indem man nach und nach von den Versetzungsregeln $A=E$, $A=F$, ꝛc. $B=C$, $B=D$, ꝛc. $C=D$, $C=E$, ꝛc. Gebrauch macht, oder mit einem Worte, indem man die gegebenen Typen A, B, C, ꝛc. auf alle mögliche Arten zu zwey und zwey einander gleich setzt.

5) Es sey die Anzahl der nach den Vorschriften in 1, 2, 3, 4, erhaltenen Typen $= \nu$. Man nehme nun aus den sämmtlichen Typen, welche aus allen möglichen Versetzungen von x', x'', x''', ꝛc. entstehen, irgend einen andern, der nicht unter den schon gefundenen begriffen ist, und verfahre mit demselben nach den nämlichen Vorschriften, so erhält man wieder ν gleiche Typen. Fährt man auf diese Art so lange fort, bis alle Typen erschöpft sind, so erhält man endlich eine Anzahl Abtheilungen, jede von ν gleichen Typen. Daß aber die Typen, welche in einer jeden solchen Abtheilung vorkommen, von den Typen in allen anderen Abtheilungen verschieden seyn werden, ist eine unmittelbare Folge von § 52 IV.

Zus. Aus dieser Auflösung ergiebt sich, daß die Zahl der verschiedenen Werthe, welche eine Funktion erhalten kann, immer ein Submultiplum von der Zahl der sämmtlichen Werthe

the ist, welche aus allen möglichen Versetzungen von x', x'', x''', *rc* entstehen.

Beysp. I. Eine Funktion sey von solcher Beschaffenheit, daß

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f:(x'')(x''')(x')(x^{IV})$$
$$= f:(x'')(x''')(x^{IV})(x')$$

und man verlangt die gleichen Werthe derselben zu finden.

Aus der Gleichung $A=B$, oder $f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f:(x'')(x''')(x')(x^{IV})$ erhält man zuerst die Periode

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f:(x'')(x''')(x')(x^{IV})$$
$$= f:(x''')(x')(x'')(x^{IV})$$

Aus jedem dieser drey Typen erhält man durch die Anwendung der Gleichung $A=C$, oder $f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f:(x'')(x,'')(x^{IV})(x')$ eine Periode von vier gleichen Typen, also in allem zwölf gleiche Typen, nämlich:

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f:(x'')(x''')(x^{IV})(x') =$$
$$f:(x''')(x^{IV})(x')(x'') = f:(x^{IV})(x')(x'')(x''') =$$
$$f:(x''')(x')(x^{IV})(x'') = f:(x')(x^{IV})(x'')(x''') =$$
$$f:(x^{IV})(x'')(x''')(x') = f:(x'')(x''')(x')(x^{IV}) =$$
$$f:(x''')(x')(x'')(x^{IV}) = f:(x')(x'')(x^{IV})(x''') =$$
$$f:(x'')(x^{IV})(x''')(x') = f:(x^{IV})(x''')(x')(x'')$$

Endlich erhält man aus diesen zwölf Typen, durch die Anwendung der Gleichung $B=C$, oder $f:(x'')(x''')(x')(x^{IV}) = f:(x'')(x''')(x^{IV})(x')$, d. h. durch die Verwechselung der Wurzeln in den beyden letzten Zellen, zwölf andere Typen, die mit jenen zusammen die sämmtlichen 24 Typen der Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x^{IV})$ geben. Hieraus ergiebt sich, daß eine Funktion von der vorausgesetzten Beschaffenheit nothwendig symmetrisch seyn muß.

Beysp. II. Eine Funktion sey von solcher Beschaffenheit, daß

BIBLIOTHEK

$f : (x')(x'')(x''')(x^{iv}) = f : (x'')(x')(x''')(x^{iv}) =$
$f : (x')(x'')(x^{iv})(x''') = f : (x''')(x^{iv})(x')(x'')$
und man will nun die gleichen Werthe derselben finden.

Die Gleichung $A=B$, oder $f : (x')(x'')(x''')(x^{iv}) = f : (x'')(x')(x''')(x^{iv})$ giebt nicht mehr als diese beyden gleichen Typen. Wendet man auf dieselben die Gleichung $A=C$, oder $f : (x')(x'')(x''')(x^{iv}) = f : (x')(x'')(x^{iv})(x''')$ an, so erhält man die folgenden vier gleichen Typen:

$f : (x')(x'')(x''')(x^{iv}) = f : (x')(x'')(x^{iv})(x''') =$
$f : (x'')(x')(x''')(^{iv}) = f : (x'')(x')(x^{iv})(x''') =$

Aus diesen erhält man wieder vermittelst der Gleichung $A=D$, oder $f : (x')(x'')(x''')(x^{iv}) = f : (x''')(x^{iv})(x')(x'')$ die folgenden acht gleichen Typen:

$f : (x')(x'')(x''')(x^{iv}) = f : (x''')(x^{iv})(x')(x'') =$
$f : (x')(x'')(x^{iv})(x''') = f : (x^{iv})(x''')(x')(x'') =$
$f : (x'')(x')(x''')(x^{iv}) = f : (x''')(x^{iv})(x'')(x') =$
$f : (x'')(x')(x^{iv})(x''') = f : (x^{iv})(x''')(x'')(x') =$

Die Gleichungen $B=C$, $B=D$, $C=D$ geben immer wieder dieselben Typen. Es hat also der Typus $f : (x')(x'')(x''')(x^{iv})$ nicht mehr als sieben gleiche neben sich.

Man nehme nun irgend einen anderen Typen unter den noch übrigen sechzehn, z. B. $f : (x''')(x')(x^{iv})(x'')$ und verfahre mit demselben eben so, wie vorhin mit $f : (x')(x'')(x''')(x^{iv})$, so erhält man wieder acht gleiche Typen, nämlich

$f : (x''')(x')(x^{iv})(x'') = f : (x^{iv})(x'')(x''')(x') =$
$f : (x''')(x')(x'')(x^{iv}) = f : (x'')(x^{iv})(x''')(x') =$
$f : (x')(x''')(x^{iv})(x'') = f : (x^{iv})(x'')(x')(x''') =$
$f : (x')(x''')(x'')(x^{iv}) = f : (x'')(x^{iv})(x')(x''') =$

und wenn man aus den übrigen acht Typen irgend einen

wählt, z. B. $f:(x'')(x''')(x^{IV})(x')$, und mit diesem auf die nämliche Art verfährt, so erhält man sie alle.

Hieraus ergiebt sich also, daß die Funktion von der vorausgesetzten Beschaffenheit nicht mehr als drey verschiedene Werthe haben könne, nämlich: $f:(x')(x'')(x''')(x^{IV})$; $f:(x''')(x')(x^{IV})(x'')$, $f:(x'')(x''')(x^{IV})(x')$, und daß daher eine solche Funktion auf keine höhere Gleichung als vom dritten Grade führen werde. Von dieser Natur sind die Funktionen $(x'+x''-x'''-x^{IV})^2$, $x'x''+x'''x^{IV}$, und noch unzählich viele andere, welche zu finden in der Folge gelehrt werden soll. Will man aber eine solche Funktion zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades gebrauchen, so ist es nicht genug, daß die transformirte Gleichung von einem niedrigern Grade als die gegebene sey, sondern man muß auch im Stande seyn, aus den bekannten Werthen einer solchen Funktion die Wurzeln x', x'', x''', x^{IV} durch Gleichungen von einem niedrigern Grade als den vierten zu bestimmen, weil sonst die Transformirung der Gleichung zu nichts geholfen hätte. Für die Funktionen $x'x''+x'''x^{IV}$, $(x'+x''-x'''-x^{IV})^2$, ist dies wirklich der Fall, wie wir § 40 und § 41 gesehen haben. In der Folge werden die Bedingungen angegeben werden, unter welchen es überhaupt möglich ist, aus dem bekannten Werthe einer Funktion $f:(x')(x''(x''')\ldots(x^{(\mu)})$ die Werthe der Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(\mu)}$ durch Gleichungen von einem niedrigern als dem μten Grade zu finden.

§ 55.

Aufg. Den Grad der Gleichung zu bestimmen, von welcher eine gegebene Funktion abhängt.

Aufl. 1) Befinden sich in einer Funktion $f:(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\mu)})$ alle Wurzeln der gegebenen Gleichung, und ist diese Funktion so beschaffen, daß sie bey jeder Versetzung der

Wurzeln ihren Werth ändert, so ist die transformirte Gleichung nothwendig von dem Grade $1 . 2 . 3 \ldots\ldots \mu$.

2) Ist die Funktion von einer solchen Beschaffenheit, daß eine Anzahl Typen A, B, C, D, ꝛc. einander gleich werden, und ist die Anzahl der gleichen Typen, welche man nach den Vorschriften in 1, 2, 3, 4, des vor. §'s überhaupt daraus ableiten kann, $=\nu$, so ist die Zahl der verschiedenen Werthe, deren eine solche Funktion fähig ist, oder der Grad der transformirten Gleichung

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots \mu}{\nu}$$

3) Bleibt die Funktion ungeändert, wenn m Wurzeln ihre Stellen auf alle mögliche Arten unter einander wechseln, so ist der Grad der transformirten Gleichung

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots \mu}{1 . 2 \ldots . m} = \mu . \mu - 1 \ldots . m + 1$$

4) Bleibt die Funktion auch dann noch ungeändert, wenn m' andere Wurzeln, und wieder m'' andere Wurzeln, u. s. w. ihre Stellen wechseln, so ist der Grad der transformirten Gleichung.

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \mu}{1 . 2 \ldots m \times 1 . 2 \ldots m' \times 1 . 2 . . m'' \times \text{ꝛc.}}$$

5) Ist die Funktion von solcher Beschaffenheit, daß jedesmal ihr Werth ungeändert bleibt, wenn m Wurzeln, und wieder m' andere Wurzeln, u. s. w. ihre Stellen auf alle mögliche Arten wechseln, und sind noch überdies eine Anzahl Typen A, B, C, D, ꝛc. einander gleich, so ist der Grad der transformirten Gleichung

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \mu}{1 . 2 \ldots m \times 1 . 2 \ldots m' \times 1 . 2 \ldots m'' \times \text{ꝛc.} \times \nu}$$

wenn ν die Bedeutung in 2 behält.

6) Befinden sich nicht alle Wurzeln der gegebenen Gleichung in der Funktion $f:(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\mu)})$, und ist die Gleichung vom nten Grade, so müssen alle die in 1, 2, 3, 4, 5, angegebenen Formeln noch mit dem Faktor

$$\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n-\mu+1}{1\,.\,\;2\,.\;\;3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\mu}$$

multiplicirt werden.

Der Grund von allem diesen ist aus dem Vorhergehenden klar genug.

§ 56.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

die Gleichung zu finden, von welcher die Funktion $f:(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\mu)})$ abhängt.

Aufl. 1) Man suche zuerst alle die verschiedenen Werthe, welche diese Funktion sowohl durch die Vertauschung der darin befindlichen Wurzeln mit den andern Wurzeln der gegebenen Gleichung, als auch durch die Versetzung derselben erhalten kann. Diese verschiedenen Werthe sollen durch y', y'', y''', $y^{\prime r}\ldots\ldots y^{(\pi)}$ bezeichnet werden.

2) Man mache hierauf die Gleichung

$$(t-y')(t-y'')(t-y''')\ldots(t-y^{(\pi)}) = 0$$

und multiplicire die Faktoren im ersten Theile wirklich. Es sey

$$t^\pi - A't^{\pi-1} + B't^{\pi-2} - C't^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

die Gleichung, welche hieraus entstehet, also

$$A' = y' + y'' + y''' + y^{\prime r} + \text{ꝛc.}$$
$$B' = y'y'' + y'y''' + y'y^{\prime r} + y''y''' + \text{ꝛc.}$$
$$C' = y'y''y''' + y'y''y^{\prime r} + y'y'''y^{\prime r} + \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

3) Die Funktionen A', B', C', rc. sind symmetrisch in Beziehung auf y', y'', y''', ... $y^{(\pi)}$, und es kann daher keine Verwechselung dieser Größen eine Veränderung in den Werthen jener Funktionen hervorbringen. Es sind aber die Größen y', y'', y''' .... $y^{(\pi)}$ selbst wieder Funktionen von den Wurzeln x', x'', x''', rc. und zwar solche, welche bloß in einander übergehen, wenn man die Wurzeln auf jede beliebige Art vertauscht und versetzt. Es gehet also durch die Vertauschung und Versetzung der Wurzeln in den obigen Ausdrücken für A', B', C', rc. weiter keine Veränderung vor, als daß y', y'', y''', rc. ihre Stellen wechseln. Da nun dieses in den Werthen von A', B', C', rc. keine Veränderung hervorbringt, so bleiben diese Werthe auch durch die Vertauschung und Versetzung von x', x'', x''', rc. ungeändert. Es sind also die Coefficienten A', B', C', rc. nothwendig symmetrische Funktionen von den Wurzeln x', x'', x''', rc.

4) In den beyden ersten Abschnitten wurde aber gezeigt, daß sich jede symmetrische Funktion von den Wurzeln einer Gleichung stets rational durch die Coefficienten dieser Gleichung ausdrücken lasse. Es lassen sich also auch die Coefficienten A', B', C', rc. stets rational durch A, B, C, rc. ausdrücken.

5) Es läßt sich also jederzeit eine Gleichung finden, von welcher eine gegebene Funktion von den Wurzeln einer anderen Gleichung abhängt, und die Coefficienten der ersteren werden alsdann immer rationale Funktionen von den Coefficienten der letzteren seyn.

IV. Von der Elimination, nebst einigen Anwendungen derselben auf die Reduktion der Gleichungen.

§ 57.

Aufg. Es sind n Gleichungen des ersten Grades gegeben, welche eben so viele unbekannte Größen enthalten: man soll die Auflösung derselben auf die Auflösung von bloß n — 1 Gleichungen des ersten Grades reduciren, welche nur n — 1 dieser unbekannten Größen enthalten.

Aufl. 1) Es seyen

$$ax + by + cz + \ldots\ldots + kv + lw = A$$
$$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots + k_1v + l_1w = A_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots + k_2v + l_2w = A_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots\ldots + k_{n-1}v + l_{n-1}w = A_{n-1}$$

die n gegebenen Gleichungen; x, y, z . . . . . v, w die n unbekannten Größen; a, b, c . . . k, l; a_1, b_1, c_1 . . . k_1, l_1; a_2, b_2, c_2, ... k_2, l_2; ꝛc.; desgleichen A_1, A_2, A_3, ꝛc. gegebene Größen.

2) Man nehme n — 1 für jetzt noch unbekannte Größen Π_1, Π_2, Π_3 . . . . Π_{n-1} an, und multiplicire die zweyte Gleichung mit Π_1, die dritte mit Π_2, die vierte mit Π_3, u. s. w. endlich die letzte mit Π_{n-1}; addire hierauf alle diese Produkte zur ersten Gleichung: hierdurch entsteht die Gleichung

$$A + A_1\Pi_1 + A_2\Pi_2 + \ldots\ldots + A_{n-1}\Pi_{n-1} =$$
$$(a + a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + \ldots\ldots + a_{n-1}\Pi_{n-1})x$$
$$+(b + b_1\Pi_1 + b_2\Pi_2 + \ldots\ldots + b_{n-1}\Pi_{n-1})y$$
$$+(c + c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2 + \ldots\ldots + c_{n-1}\Pi_{n-1})z$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(l + l_1\Pi_1 + l_2\Pi_2 + \ldots\ldots + l_{n-1}\Pi_{n-1})w$$

3) Man suche nun die Faktoren $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots \Pi_{n-1}$ so zu bestimmen, daß die Coefficienten aller unbekannten Größen $x, y, z, \ldots v, w$, diejenigen ausgenommen, die man finden will, verschwinden. Wollte man z. B. x finden, so setze man

$$b + b_1\Pi_1 + b_2\Pi_2 + \ldots\ldots + b_{n-1}\Pi_{n-1} = 0$$
$$c + c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2 + \ldots\ldots + c_{n-1}\Pi_{n-1} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l + l_1\Pi_1 + l_2\Pi_2 + \ldots\ldots + l_{n-1}\Pi_{n-1} = 0$$

4) Hierdurch reducirt sich die Gleichung in 2 auf die folgende:

$$A + A_1\Pi_1 + A_2\Pi_2 + \ldots\ldots + A_{n-1}\Pi_{n-1} =$$
$$(a + a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + \ldots\ldots + a_{n-1}\Pi_{n-1})x$$

und diese giebt

$$x = \frac{A + A_1\Pi_1 + A_2\Pi_2 + \ldots\ldots + A_{n-1}\Pi_{n-1}}{a + a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + \ldots\ldots + a_{n-1}\Pi_{n-1}}$$

und die Bestimmung der angenommenen Größen $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots \Pi_{n-1}$ hängt von der Auflösung der Gleichungen in 3 ab.

5) Um daher den Werth von x zu finden, muß man die $n - 1$ Gleichungen in 3 auflösen, daraus die $n - 1$ Größen $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \ldots\ldots \Pi_{n-1}$ bestimmen, und hierauf ihre Werthe in dem für x gefundenen Ausdruck substituiren.

6) Vertauscht man sowohl in 3 als in 4, a mit b, so fin-

det man y, und eben so findet man z, wenn man in 3 und 4 die Buchstaben a und c vertauscht, u. s. w.

Anmerk. Die hier gelehrte Reduktion der Gleichungen kann bisweilen mit Nutzen gebraucht werden, wie man weiter hin noch in diesem Theile an einem Beyspiele sehen wird. Hat man aber bloß die Absicht, die gegebenen Gleichungen aufzulösen, so würde man hierdurch seinen Zweck nur sehr langsam erreichen; in diesem Falle ist die Methode des folgenden §'s vorzuziehen.

§ 58.

Aufg. Es sind die folgenden n Gleichungen vom ersten Grade gegeben:

$$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots + k_1v + l_1w = m_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots + k_2v + l_2w = m_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + \ldots\ldots + k_3v + l_3w = m_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_nx + b_ny + c_nz + \ldots\ldots + k_nv + l_nw = m_n$$

worin n unbekannte Größen x, y, z . . . . . v, w vorkommen: man soll die Werthe dieser Größen unmittelbar, und ohne irgend eine Substitution oder andere Rechnung finden.

Aufl. 1) Hätte man bloß die beyden Gleichungen mit zwey unbekannten Größen

$$a_1x + b_1y = m_1$$
$$a_2x + b_2y = m_2$$

so würde man auf dem gewöhnlichen Wege finden

$$x = \frac{m_1b_2 - m_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\quad y = \frac{a_1m_2 - a_2m_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

2) Hätte man die drey Gleichungen mit drey unbekannten Größen

$$a_1x + b_1y + c_1z = m_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = m_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = m_3$$

so würde man finden

$$x = \frac{m_1b_2c_3 - m_1b_3c_2 - m_2b_1c_3 - m_2b_3c_1 + m_3b_1c_2 - m_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

$$y = \frac{a_1m_2c_3 - a_1m_3c_2 - a_2m_1c_3 + a_2m_3c_1 + a_3m_1c_2 - a_3m_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

$$z = \frac{a_1b_2m_3 - a_1b_3m_2 - a_2b_1m_3 + a_2b_3m_1 + a_3b_1m_2 - a_3b_2m_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

3) Aus den Formeln in 1 und 2 ergeben sich nun durch Induktion die Regeln für die Auflösung der obigen allgemeinen Gleichungen. Um sie kürzer zu fassen, werde ich die Zahlen, welche den Buchstaben m, a, b, ꝛc. angehängt sind, die Zeigezahlen nennen.

a) Man mache das Produkt $a_1b_2c_3 \ldots . k_{n-1}l_n$; permutire hierauf die Zeigezahlen auf alle mögliche Arten, indem man die Buchstaben selbst unverändert läßt: das Aggregat aller dieser $1 . 2 . 3 \ldots . n$ Produkte giebt alsdann den gemeinschaftlichen Nenner in den Werthen von x, y, z . . . . v, w.

b) Um die Vorzeichen eines jeden der Glieder zu finden, woraus der Nenner entstehet, untersuche man, wie oft in einem solchen Gliede eine niedrige Zeigezahl auf eine höhere, mittelbar oder unmittelbar, folgt. Ist die Zahl dieser Folgen gerade oder Null, so bekommt das Glied das Zeichen +, ist sie ungerade, das Zeichen —.

c) Hat man den gemeinschaftlichen Nenner gefunden, so erhält man aus demselben den Zähler in dem Werthe von x, wenn man bloß m für a setzt; den Zähler in dem Werthe von y, wenn man m für b setzt; den

Zähler in dem Werthe von z, wenn man m für c setzt; und so auch mit den übrigen unbekannten Größen.

So ist der Nenner in den Werthen von x, y, z, bloß das Produkt $a_1 b_2 c_3$ mit den 1 . 2 . 3 Permutationen der Zeigezahlen, und in Betreff der Vorzeichen, hat z. B. das Glied $a_2 b_3 c_1$ das Zeichen +, weil es darin zwey Folgen einer niedrigern Zeigezahl auf eine höhere giebt, nämlich 21, 31; in dem Gliede $a_3 b_2 c_1$ aber giebt es drey solche Folgen, nämlich 32, 31, 21, und es hat daher dieses Glied das Zeichen —. Auch sind die Zähler auf die in c) angegebene Art gebildet.

Beysp. Aus den vier Gleichungen

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = m_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = m_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = m_3$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4u = m_4$$

erhält man für den gemeinschaftlichen Nenner in den Werthen von x, y, z, u, den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} & a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 + a_1b_3c_4d_2 \\ + & a_1b_4c_2d_3 - a_1b_4c_3d_2 - a_2b_1c_3d_4 + a_2b_1c_4d_3 \\ + & a_2b_3c_1d_4 - a_2b_3c_4d_1 - a_2b_4c_1d_3 + a_2b_4c_3d_1 \\ + & a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 - a_3b_2c_1d_4 + a_3b_2c_4d_1 \\ + & a_3b_4c_1d_2 - a_3b_4c_2d_1 - a_4b_1c_2d_3 + a_4b_1c_3d_2 \\ + & a_4b_2c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 - a_4b_3c_1d_2 + a_4b_3c_2d_1. \end{aligned}$$

Anmerk. Einen strengen Beweis der in 3 gegebenen Regeln, wie auch noch manches andere Gute, findet man in einer Abhandlung von Rothe über Permutationen in der Hindenburgschen zweyten Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen, Seite 263 u. f.

§ 59.

Da die Werthe der unbekannten Größen bey der Auflösung des vor. §'s immer in der Form von Brüchen erscheinen, so

könnte es sich bisweilen ereignen, daß der gemeinschaftliche Nenner derselben $= 0$ wird, wie z. B. wenn für zwey Gleichungen $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, und für drey Gleichungen $a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 = 0$ wird. Sind in diesem Falle auch die Zähler $= 0$, so kommt man auf Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$. Eine solche Form giebt alsdann bloß zu erkennen, daß die durch die Gleichungen angegebenen Bedingungen nicht von der Art sind, daß man durch dieselben allein die Werthe der unbekannten Größen bestimmen könnte. Hätte man z. B. die beyden Gleichungen $3x + 5y = 16$, $6x + 10y = 32$, so wäre $a_1 = 3$, $b_1 = 5$, $a_2 = 6$, $b_2 = 10$, $m_1 = 16$, $m_2 = 32$, und daher aus den Formeln in 1 des vor. §'s $x = \frac{16 \cdot 10 - 32 \cdot 5}{3 \cdot 10 - 6 \cdot 5} = \frac{0}{0}$, $y = \frac{3 \cdot 32 - 6 \cdot 16}{3 \cdot 10 - 6 \cdot 5} = \frac{0}{0}$, die Werthe von x und y blieben also unbestimmt. Man siehet aber auch sogleich, warum sie unbestimmt bleiben mußten. Denn dividirt man die zweyte Gleichung durch 2, so erhält man die erste; diese ist also in jener schon enthalten, und man hat daher im Grunde nicht mehr als eine einzige Gleichung, woraus weder x noch y bestimmt werden kann.

Sind aber die gegebenen Gleichungen von solcher Beschaffenheit, das zwar der Nenner in dem Werthe einer unbekannten Größe, nicht aber der Zähler verschwindet, d. h. daß man auf einen Ausdruck von der Form $\frac{a}{0} = \infty$ kommt; so giebt ein solches Resultat jedesmal zu erkennen, daß die durch die Gleichung ausgedrückten Relationen einander widersprechen, und nicht zu gleicher Zeit statt haben können, so lange die unbekannten Größen, wie hier immer vorausgesetzt wird, nur endliche Werthe haben sollen. Hätte man z. B. die beyden Gleichungen $3x + 5y = 16$, $6x + 10y = 20$, so erhielte

man aus 1 des vor. §'s $x = \frac{60}{0}$, $y = \frac{-36}{0}$; es müssen also, da wir überzeugt sind, daß es keine andere Werthe als diese geben könne, in den gegebenen Gleichungen widersprechende Relationen vorhanden seyn. Dies ist auch wirklich der Fall; denn multiplicirt man die erste Gleichung mit 2, so erhält man $6x + 10y = 32$, da doch nach der zweyten Gleichung $6x + 10y = 20$ seyn soll.

§ 60.

Die Aufgaben § 57 und 58 enthalten alles, was die Elimination bey den Gleichungen des ersten Grades betrifft. Ich wende mich nun zu der Elimination bey den Gleichungen von höheren Graden; und zwar werde ich vorerst annehmen, daß nicht mehr als zwey Gleichungen mit zwey oder auch mit mehreren unbekannten Größen gegeben seyen. Hierbey müssen nun zwey Fälle in Erwgnung gezogen werden, nämlich: 1) wenn die eine Gleichung in Hinsicht auf die zu eliminirende Größe vom ersten Grade, und die zweyte von einem höheren Grade ist; 2) wenn beyde Gleichungen von höheren Graden sind.

Der erste Fall hat gar keine Schwierigkeiten; denn man darf nur den Werth in der zu eliminirenden Größe aus der ersten Gleichung ziehen, und diesen Werth in der zweyten substituiren, so erhält man eine Gleichung, worin diese Größe nicht mehr vorkommt.

Im zweyten Falle suche man durch die Multiplikation mit schicklichen Faktoren, und durch die gehörige Verbindung der daraus entstandenen Resultate, den Grad der Gleichungen in Beziehung auf die zu eliminirende Größe immer mehr zu erniedrigen, bis man auf eine Gleichung kommt, welche diese Größe nur in der ersten Potenz enthält. Ziehet man nun aus dieser Gleichung den Werth der zu eliminirenden Größe, und

substituirt denselben in derjenigen Gleichung, worin sie in der niedrigsten Potenz vorkommt, so erhält man die gesuchte Endgleichung.

Die folgenden Aufgaben werden alles dies hinlänglich erläutern.

§ 61.

Aufg. Es seyen p, q, r, p', q', r', Funktionen von y; es seyen ferner die beyden Gleichungen

$$\text{I. } p + qx + rx^2 = 0$$

$$\text{II. } p' + q'x + r'x^2 = 0$$

zwischen x und y gegeben: man soll die Gleichung finden, welche aus der Eliminirung des x entstehet.

Aufl. 1) Man multiplicire die erste Gleichung mit p', die zweyte mit p, subtrahire hierauf die erhaltenen Resultate von einander, und dividire durch x; hierdurch entstehet die Gleichung

$$pq' - p'q + (pr' - p'r)x = 0$$

und diese giebt

$$x = \frac{p'q - pq'}{pr' - p'r}.$$

2) Man multiplicire ferner die erste Gleichung mit r' und die zweyte mit r, und subtrahire, so kommt

$$pr' - p'r + (qr' - q'r)x = 0$$

Wird hierin für x sein Werth aus 1 substituirt, so erhält man die Gleichung

$$(\psi) \ldots (pr' - p'r)^2 + (p'q - pq')(qr' - q'r) = 0$$

eine Gleichung, welche bloß y enthält, und welche folglich die gesuchte Endgleichung ist.

3) Hätte man den Werth von x aus 1 unmittelbar in einer von den gegebenen Gleichungen z. B. in I. substituirt, so hätte man gefunden

$$p + \frac{q(p'q - pq')}{pr' - p'r} + \frac{r(p'q - pq')^2}{(pr' - p'r)^2} = 0$$

und wenn man mit $(pr' - p'r)^2$ multiplicirt und hierauf durch p dividirt, die nämliche Gleichung wie in 2.

§. 62.

Aufg. Aus den beyden Gleichungen

$$\text{I. } p + qx + rx^2 = 0$$

$$\text{II. } p' + q'x + r'x^2 + s'x^3 = 0$$

das x zu eliminiren, vorausgesezt, daß p, q, r, p', q', r', s', solche Ausdrücke seyen, worin x nicht vorkommt.

Aufl. 1) Man multiplicire die erste Gleichung mit p', die zweite mit p, und subtrahire die erhaltenen Resultate, so entstehet die Gleichung

$$pq' - p'q + (pr' - p'r)x + ps'x^2 = 0$$

2) Verbindet man die Gleichung I. mit dieser, so tritt der Fall des vor. §'s ein, nur daß hier $pq' - p'q$, $pr' - p'r$, ps', das sind, was dort p', q', r' waren. Man hat daher nur nöthig, jenem Werthe für diese in der Gleichung (ψ) des vor. §'s zu substituiren. Thut man dieses wirklich, so erhält man die Gleichung

$$(p^2s' + qrp' - prq')^2 + (pqs' - prr' + r^2p') \times (pqq' - q^2p' - p^2r' + prp') = 0$$

3) Wenn man diese Gleichung entwickelt, das, was sich aufhebt, wegläßt, und hierauf durch p dividirt, so erhält man

$$p^3s'^2 + p^2rr'^2 + pr^2q'^2 + r^3p'^2 - qr^2p'q' + (q^2 - 2pr)(rp'r' + pq's') + (3pqr - q^3)p's' - pqrq'r' - p^2qr's' = 0$$

eine Gleichung, die kein x mehr enthält.

§ 63.

Aufg. p, q, r, s, p', q', r', s', sollen wieder Funktionen seyn, die kein x enthalten: man soll das Resultat der Elimination des x aus den beyden Gleichungen

$$\text{I. } p + qx + rx^2 + sx^3 = o$$
$$\text{II. } p' + q'x + r'x^2 + s'x^3 = o$$

finden.

Aufl. 1) Man multiplicire die erste Gleichung mit p', die zweyte mit p, und subtrahire die Resultate; dies giebt nach der Division mit x

$$pq' - qp' + (pr' - rp')x + (ps' - sp')x^2 = o$$

2) Man multiplicire ferner die erste Gleichung mit s', die zweyte mit s, und subtrahire wieder; dies giebt

$$sp' - ps' + (sq' - qs')x + (sr' - rs')x^2 = o$$

3) Weiter braucht man die Reduktion nicht fortzusetzen; denn da die in 1 und 2 gefundenen Gleichungen den Gleichungen I und II in § 61, für welche daselbst das Resultat der Elimination gefunden worden, ähnlich sind, so darf man nur in der Gleichung (ψ) daselbst die folgenden Substitutionen machen:

$$pq' - qp' \text{ für } p, \quad sp' - ps' \text{ für } p'$$
$$pr' - rp' \text{ für } q, \quad sq' - qs' \text{ für } q'$$
$$ps' - sp' \text{ für } r, \quad sr' - rs' \text{ für } r'$$

4) Durch diese Substitution erhält man nach der gehörigen Entwickelung

$$(pq' - qp')^2 (sr' - rs')^2 - 2(pq' - qp')(ps' - sp')$$
$$(sp' - ps')(sr' - rs') + (ps' - sp')^2 (sp' - ps')^2$$
$$+ (pr' - rp')^2 (sp' - ps')(sr' - rs') - (pq' - qp')$$
$$(pr' - rp')(sq' - qs')(sr' - rs') - (pr' - rp')$$
$$(ps' - sp')(sp' - ps')(sq' - qs') + (pq' - qp')$$
$$(ps' - sp')(sq' - qs')^2 = o$$

5) Der

5) Der erste Theil dieser Gleichung besteht aus sieben Gliedern, von denen fünf durch $sp' - ps'$ theilbar sind. Die beyden übrigen, nämlich das erste und fünfte, geben zusammen genommen

$$(pq' - qp')(sr' - rs') \times$$
$$[(pq' - qp')(sr' - rs') - (pr' - rp')(sq' - qs')]$$
$$= (pq' - qp')(sr' - rs')(pqr's' + rsp'q' - prq's' - qsp'r')$$
$$= (pq' - qp')(sr' - rs')(sp' - ps')(rq' - qr')$$

und es läßt sich also die Summe dieser beyden Glieder ebenfalls durch $sp' - ps'$ theilen.

6) Wird daher die Gleichung in 4 durch $sp' - ps'$ dividirt, so erhält man endlich die Gleichung

$$(pq' - qp')(sr' - rs')(rq' - qr') + 2(pq' - qp')$$
$$(sp' - ps')(sr' - rs') + (sp' - ps')^3 + (pr' - rp')^2$$
$$(sr' - rs') + (pr' - rp')(sp' - ps')(sq' - qs') -$$
$$(pq' - qp')(sq' - qs')^2 = 0$$

§ 64.

Aufg. Aus den beyden Gleichungen

$$\text{I. } p + qx + rx^2 + sx^3 + tx^4 = 0$$
$$\text{II. } p' + q'x + r'x^2 + s'x^3 + t'x^4 = 0$$

die Größe x zu eliminiren.

Aufl. 1) Man multiplicire die erste Gleichung mit p', die zweyte mit p, und subtrahire; dies giebt nach der Division mit x,

$$pq' - qp' + (pr' - rp')x + (ps' - sp')x^2$$
$$+ (pt' - tp')x^3 = 0$$

2) Man multiplicire ferner die erste Gleichung mit t', die zweyte mit t, und subtrahire wieder; dies giebt

$$pt' - tp' + (qt' - tq')x + (rt' - tr')x^2$$
$$+ (st' - ts')x^3 = 0$$

3) Da die Gleichungen in 1 und 2 beyde vom dritten Grade sind, so kann man, um sich die Mühe zu ersparen, die Rechnung fortzusetzen, nur geradesweges die in 6 des vor. §'s gefundene Gleichung brauchen, wenn man darin die folgenden Substitutionen macht:

$pq' - qp'$ für p, $pt' - tp'$ für p'

$pr' - rp'$ für q, $qt' - tq'$ für q'

$ps' - sp'$ für r, $rt' - tr'$ für r'

$pt' - tp'$ für s, $st' - ts'$ für s'

und das Resultat dieser Substitution ist die gesuchte Endgleichung.

§ 65.

Aufg. Aus den beyden allgemeinen Gleichungen

I. $p + qx + rx^2 + sx^3 + \ldots + vx^m = 0$

II. $p' + q'x + r'x^2 + s'x^3 + \ldots + v'x^n = 0$

das x zu eliminiren.

Aufl. 1) Ich will annehmen, es sey $m < n$. Man multiplicire alsdann die eine Gleichung mit dem ersten Gliede der zweyten, hier mit p', und die andere mit dem ersten Gliede der ersten, hier mit p, subtrahire hierauf, und dividire den Rest durch x, so erhält man eine Gleichung von der Form

III. $A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_{-1}x^{n-1} = 0$

2) Ist nun noch $m < n - 1$, so verfahre man mit den Gleichungen I und III eben so, wie vorhin mit den Gleichungen I und II.

Auf diese Art fahre man fort, den Grad der resultirenden Gleichung zu vermindern, bis man zu einer Gleichung von dem mten Grade kommt. Es sey

IV. $B + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots + B_mx^m = 0$

diese Gleichung.

4) Man verbinde nun die Gleichung IV mit der Gleichung I auf eine doppelte Art, nämlich: 1) indem man die erste mit p, die zweyte mit B multiplicirt, die Resultate subtrahirt und den Rest durch x dividirt; 2) indem man die erste mit v, die zweyte mit B_m multiplicirt, und die Resultate abermals von einander subtrahirt Durch dieses Verfahren erhält man zwey Gleichungen von m — 1 ten Grade

$$\text{V.}\quad C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots + C_{m-1} x^{m-1} = 0$$

$$\text{VI.}\quad D + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + \ldots + D_{m-1} x^{m-1} = 0$$

5) Mit den beyden erhaltenen Gleichungen verfahre man auf die nämliche Weise, wie vorhin mit I und IV, so wird man wieder zwey Gleichungen von dem m—2ten Grade erhalten. Auf diese Art erniedrige man den Grad der Gleichungen immer mehr und mehr, bis man zu zwey Gleichungen des ersten Grades kommt. Es seyen

$$K + K_1 x = 0, \quad L + L_1 x = 0$$

diese beyden Gleichungen; so hat man

$$x = -\frac{K}{K_1} = -\frac{L}{L_1}$$

und daher

$$KL_1 - LK_1 = 0$$

und diese ist die gesuchte Endgleichung, da kein x mehr darin vorkommt.

6) Es ist aber nicht durchaus nöthig, die Elimination bis zu den Gleichungen des ersten Grades fortzusetzen; hat man nämlich schon die Resultate der Elimination für Gleichungen eines gewissen Grades gefunden, so ist es, wie im Vorhergehenden gezeigt worden, schon hinlänglich, die Reduktion nur bis zu diesem Grade zu treiben.

§ 66.

Die in den vorhergehenden §en angewandte Eliminations-

Methode, deren sich Euler im neunzehnten Kapitel des zweyten Buches seiner Introduction bedient, ist zwar ganz allgemein, hat aber den bedeutenden Fehler, daß sie die Endgleichung nicht immer in ihrer einfachen Gestalt giebt. So z. B. ließ sich die Gleichung in 2 § 62 durch p dividiren, und gab dann erst die Gleichung in 5; eben so erhielt man erst nach der Division der Gleichung in 4 § 63 durch $sp' - ps'$ die Gleichung in 6. Bey den höheren Gleichungen findet dies ebenfalls statt, und die Theiler dürften alsdann schwer zu finden seyn. Wir werden aber in der Folge sehen, daß diese Theiler wirklich überflüssig sind, und gar nicht zur Endgleichung gehören. Sollte man also einen solchen Theiler etwa nicht finden können, so würde man nicht nur eine höhere Gleichung für y aufzulösen haben, als wirklich erfordert wird, sondern es würde auch unter den Wurzeln derselben solche geben, welche den Gleichungen I und II des vor. §'s nicht zugehören, d. h. welche nicht so beschaffen wären, daß man im Stande wäre, korrespondirende Werthe von x zu finden, welche den beyden genannten Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge thäten.

Da die Elimination des x aus zweyen Gleichungen zwischen x und y bloß den Zweck hat, einen oder mehrere solche Werthe für y anzugeben, daß es möglich werde, einen oder mehrere korrespondirende Werthe für x zu finden, welche beyden Gleichuugen gemeinschaftlich sind, so kann jede Methode, welche zur Erreichung dieses Zweckes dient, auch auf die Elimination angewandt werden.

Bezeichnet man daher durch a einen der Werthe des x, welchen beyde Gleichungen gemein haben, so muß $x - a$ ein gemeinschaftlicher Theiler derselben seyn; man braucht also nur die Bedingungen aufzusuchen, von welchen die Möglichkeit eines solchen Theilers abhängt. Zu dem Ende darf man

nur mit den gegebenen Gleichungen gerade so verfahren, als wenn man den gemeinschaftlicheu Theiler derselben suchte; der letzte Rest, zu dem man bey den successiven Divisionen kommt, und der kein x mehr enthält, muß, wenn es einen solchen Theiler geben soll, nothwendig verschwinden. Setzt man daher diesen Rest $= 0$, so erhält man die gesuchte Bedingungs- oder Endgleichung. Die folgende Aufgabe wird hinreichen, das Gesagte zu erläutern. Die Methode, den gemeinschaftlichen Theiler zu finden, wird übrigens als bekannt vorausgesetzt.

§ 67.

Aufg. Aus den beyden Gleichungen

I. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 98 = 0$

II. $x^2 + 4xy - 2y^2 - 10 = 0$

das x nach der Methode des gemeinschaftlichen Theilers zu eliminiren.

Aufl. Die Rechnung kommt wie folgt zu stehn.

1) Dividend $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 98$

Divisor $x^2 + 4xy - 2y^2 - 10$

Quotient $x - y$

Erster Rest $(9y^2 + 10)x - 2y^3 - 10y - 98$

2) Dividend $x^2 + 4xy - 2y^2 - 10$

oder besser $(9y^2 + 10)x^2 + 36xy^3 + 40xy - 18y^4 - 110y^2 - 100$

Divisor $(9y^2 + 10)x - 2y^3 - 10y - 98$

Quotient $x + \frac{38y^3 + 50y + 98}{9y^2 + 10}$

Zweyter und letzter Rest

$$-18y^4 - 110y^2 - 100 + \frac{(2y^3 + 10y + 98)(38y^3 + 50y + 98)}{9y^2 + 10}$$

3) Wird dieser Rest $= 0$ gesetzt, und hierauf mit $9y^2 + 10$ multiplicirt, so erhält man

$$-86y^6 - 690y^4 + 3920y^3 - 1500y^2 + 5880y + 8604 = 0$$

oder, wenn man durch 2 dividirt, und durchgängig die Zeichen verändert

$$43y^6 + 345y^4 - 1960y^3 + 750y^2 - 2940y - 4302 = 0$$

und diese ist die gesuchte Bedingungs- oder Endgleichung.

Anmerk. Hat man aus der Bedingungsgleichung einen Werth des y gefunden, so kann man den ihm korrespondirenden Werth des x finden, wenn man jenen Werth in den beyden Gleichungen I und II substituirt, und sodann den gemeinschaftlichen Theiler sucht. So z. B. wird man finden, daß $y = 3$ der Endgleichung ein Genüge thut; substituirt man daher diesen Werth in I und II, so erhält man die beyden Gleichungen $x^3 + 9x^2 + 27x - 98 = 0$, $x^2 + 12x - 28 = 0$, deren gemeinschaftlicher Theiler $x - 2$ ist. Es ist demnach $x = 2$ der zu $y = 3$ gehörige Werth von x.

Man hätte aber auch diesen Werth von x unmittelbar finden können; denn man weiß schon, daß immer alsdann, wenn unter den, bey den Divisionen zum Auffinden des gemeinschaftlichen Theilers erhaltenen Resten, derjenige Rest, welcher $= 0$ wird, als der letzte angesehen wird, der vorletzte Rest der gesuchte Theiler ist. Wendet man dieses auf den gegenwärtigen Fall an, so ist $(9y^2 + 10)x - 2y^3 - 10y - 98$ dieser Theiler, und setzt man $y = 3$, so wird derselbe $91x - 182$, oder $x - 2$, welches mit dem Vorigen übereinstimmt.

Hieraus folgt aber, daß man die Endgleichung auch erhalten haben würde, wenn man den Werth $x = \frac{2y^3 + 10y + 98}{9y^2 + 10}$, den man aus der Gleichung $(9y^2 + 10)x - 2y^3 - 10y - 98 = 0$ erhält, unmittelbar in der Gleichung II, als der

niedrigsten von den beyden gegebenen, substituirt hätte. Wollte man aber eben diese Substitution in der Gleichung I machen, so würde man zu einer Gleichung vom neunten Grade gelangen, die folglich einen Faktor vom dritten Grade mehr enthält. Man wird aber in der Folge sehen, daß dieser Faktor wirklich überflüssig ist, und daß daher die Gleichung in 3 die vollständige Endgleichung sey.

Da die Endgleichung von dem sechsten Grade ist, so giebt es, außer dem Werthe $y = 3$, noch fünf andere Werthe von y, für deren jeden es einen korrespondirenden Werth des x giebt. Es kann also den Gleichungen I und II auf sechs Arten ein Genüge geschehen. Die nämliche Gleichung vom sechsten Grade würde man übrigens auch aus der Gleichung in 3. §. 62 erhalten haben, wenn man, wie es der vorliegende Fall erfordert, $p = -2y^2 - 10$, $q = 4y$, $r = 1$, $p' = -98$, $q' = 3y^2$, $r' = 3y$ und $s' = 1$, gesetzt hätte.

§ 63.

Aus der Methode des gemeinschaftlichen Theilers läßt sich wieder eine andere ableiten, die Euler in dem oben angeführten Werke lehrt.

Es seyen

$$\text{I. } x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

$$\text{II. } x^n + p'x^{n-1} + q'x^{n-2} + r'x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

die beyden gegebenen Gleichungen, aus welchen x eliminirt werden soll. Gehet man davon aus, daß diese beyden Gleichungen irgend einen gemeinschaftlichen Theiler $x - a$ haben, so kann man setzen

$$\text{III. } x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \text{etc.} = (x-a)\,\Pi$$

$$\text{IV. } x^n + p'x^{n-1} + q'x^{n-2} + \text{etc.} = (x-a)\,\Pi'$$

und es sind alsdann Π, Π', die Quotienten, welche aus der

Division der ersten Theile der Gleichungen I, II, durch $x - a$ entspringen. Diese Quotienten braucht man hier nicht wirklich zu kennen; es ist schon hinlänglich bloß zu bemerken, daß sie nothwendig die folgende Form haben müssen:

$$\Pi = x^{m-1} + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$\Pi' = x^{n-1} + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \text{ꝛc.}$$

und daß der erste $m - 1$ unbestimmte Größen A, B, C, ꝛc., und der zweyte $n - 1$ unbestimmte Größen A′, B′, C′, ꝛc., enthält.

Eliminirt man nun $x - a$ aus den beyden Gleichungen III, IV, so erhält man die identische Gleichung

$$(\varphi) \quad \begin{array}{l} (x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \text{ꝛc.})\,\Pi' = \\ (x^n + p'x^{n-1} + q'x^{n-2} + r'x^{n-3} + \text{ꝛc.})\,\Pi \end{array}$$

Verrichtet man die angezeigte Multiplication wirklich, nachdem man für Π, Π', ihre angenommenen Werthe substituirt hat, und setzt hierauf die Coefficienten gleicher Potenzen von x in den beyden Theilen der resultirenden Gleichung einander gleich, so erhält man $m + n - 1$ Gleichungen zwischen den Größen p, q, r, ꝛc. p′, q′, r′, ꝛc. A, B, C, ꝛc. A′, B′, C′, ꝛc. die sämmtlich in Beziehung auf die unbekannten Größen A, B, C, ꝛc. A′, B′, C′, ꝛc. nur von dem ersten Grade seyn werden. Da man also $m + n - 1$ Gleichungen, und nur $m + n - 2$ unbestimmte Größen A, B, C, ꝛc. A′, B′, C′, ꝛc. hat, so lassen sich diese jederzeit eliminiren, und man wird durch diese Elimination eine Gleichung erhalten, welche keine andere Größen, als die bekannten Funktionen p, q, r, ꝛc. p′, q′, r′, ꝛc enthält, und welche folglich die gesuchte Bedingungs- oder Endgleichung seyn wird.

Die folgenden Aufgaben werden das Gesagte erläutern.

§ 69.

Aufg. Aus den beyden gegebenen Gleichungen

$$\text{I.}\quad x^2 + px + q = 0$$

$$\text{II.}\quad x^3 + p'x^2 + q'x + r' = 0$$

nach der Methode des vor. §'s das x zu eliminiren.

Aufl. Da hier $m=2$, und $n=3$, so ist

$$\Pi = x + A,\ \Pi' = x^2 + A'x + B'$$

Die Gleichung (φ) des vor. §'s wird daher

$$(x^2 + px + q)(x^2 + A'x + B') =$$
$$(x^3 + p'x^2 + q'x + r')(x + A)$$

Hieraus erhält man durch die wirkliche Multiplication und Vergleichnng der Coefficienten,

$$A' + p = A + p'$$
$$B' + pA' + q = p'A + q'$$
$$pB' + qA' = q'A + r'$$
$$qB' = r'A$$

Da hier vier Gleichungen und nur drey unbestimmte Größen A, A', B', vorhanden sind, so kann man diese Größen, welche nur im ersten Grade vorkommen, eliminiren, und man wird alsdann nach der gehörigen Reduktion die nämliche Gleichung, wie in § 62 erhalten, wenn man nur, wie es die Form der hier gegebenen Gleichungen, verglichen mit den dortigen, erfordert, respektive 1, p, q, 1, p', q', r', für r, q, p, s', r', q', p', setzt.

§ 70.

Aufg. Aus den gegebenen Gleichungen

$$\text{I.}\quad x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

$$\text{II.}\quad x^4 + p'x^3 + q'x^2 + r'x + s' = 0$$

das x nach der Methode § 68 zu eliminiren.

Aufl. Hier ist $m=3$, $n=4$; man hat also

$\Pi = x^2 + Ax + B$, $\Pi' = x^3 + A'x^2 + B'x + C'$

Werden diese Werthe in der Gleichung (φ) in § 68 substituirt, so erhält man

$$(x^3 + px^2 + qx + r)(x^3 + A'x^2 + B'x + C') =$$
$$(x^4 + p'x^3 + q'x^2 + r'x + s')(x^2 + Ax + B)$$

Wenn man diese Gleichung entwickelt, und die Coefficienten ihrer beyden Theile vergleicht, so erhält man

$$A' + p = A + p'$$
$$B' + pA' + q = B + p'A + q'$$
$$C' + pB' + qA' + r' = p'B + q'A + r'$$
$$pC' + qB' + rA' = q'B + r'A + s'$$
$$qC' + rB' = r'B + s'A$$
$$rC' = s'B$$

Da in diesen sechs Gleichungen nur fünf unbestimmte Größen A, B, A', B', C', vorkommen, so lassen sich diese eliminiren, und man wird so eine Gleichung erhalten, die keine andere als die bekannten Größen p, q, r, p', q', r', s', enthält, und folglich die gesuchte Endgleichung ist.

§ 71.

Die hier erklärte zweyte Eulersche Methode ist wenigstens eben so weitläufig, wo nicht noch weitläufiger, als die erste; auch ist sie eben so wenig als die erste von dem Fehler der überflüssigen Faktoren frey, wie man sich durch die wirkliche Ausrechnung einiger leichter Fälle überzeugen kann. Bezout brauchte in seiner Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779, eine ähnliche Methode; wandte sie auf mehr als zwey Gleichungen und auf die Elimination mehrerer unbekannter Größen an; zeigte auch, wie man es in vielen Fällen anzufangen habe, um die vollständige Endgleichung zu

finden, ohne etwas Ueberflüssiges hineinzubringen. Das Werk ist zwar etwas weitschweifig, enthält aber doch mancherley Gutes, und ist mit vielem Fleiße bearbeitet. Eine Umarbeitung desselben mit Anwendung der kombinatorischen Analysis, wäre ein verdienstliches Unternehmen.

Aus der Voraussetzung des gemeinschaftlichen Theilers läßt sich aber auch noch eine andere Methode herleiten, die nicht nur weit einfacher, sondern auch direkter und der Natur der Gleichungen angemessener ist, als die vorhergehenden, indem sie sich auf die Lehre von den symmetrischen Funktionen gründet. Auch hat sie darin vor den andern einen wesentlichen Vorzug, daß sie immer, wenigstens für zwey Gleichungen und zwey unbekannte Größen, die vollständige Endgleichung giebt, ohne irgend etwas Fremdartiges hineinzubringen.

Nehmen wir zu dem Ende die Gleichungen I, II, § 68 wieder vor. Man stelle sich vor, die Gleichung I wäre schon in Hinsicht auf x aufgelöst; so werden ihre Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. Funktionen ihrer Coefficienten, und also auch Funktionen von y seyn. Eben so denke man sich die zweyte aufgelöst; so werden ihre Wurzeln, die ich durch $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$, ꝛc. bezeichnen will, ebenfalls Funktionen von y seyn. Sollen nun die beyden Gleichungen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß wenigstens eine von den Wurzeln der ersten Gleichung einer von den Wurzeln der zweyten gleich seyn. Man setze $x' = \mathfrak{x}'$, so ist $x' - \mathfrak{x}' = 0$ die Gleichung für y, welche statt haben muß, wenn die zwey bestimmten Wurzeln x', $\mathfrak{x}'$, einander gleich seyn sollen. Da aber eben so gut jede zwey andere Wurzeln beyder Gleichungen einander gleich gesetzt werden können, so erhält man so viele partikuläre Gleichungen $x' - \mathfrak{x}' = 0$, $x' - \mathfrak{x}'' = 0$, $x' - \mathfrak{x}''' = 0$ .... $x'' - \mathfrak{x}' = 0$, $x'' - \mathfrak{x}'' = 0$, $x'' - \mathfrak{x}''' = 0$ ... $x''' - \mathfrak{x}' = 0$, $x''' - \mathfrak{x}'' = 0$, $x''' - \mathfrak{x}''' = 0$, ꝛc., als sich die Wurzeln

x', x'', x''', ꝛc. mit den Wurzeln ξ', ξ'', ξ''', ꝛc. kombiniren lassen. Alle diese partikulären Gleichungen müssen aber in der gesuchten Bedingungs- oder Endgleichung zugleich enthalten seyn, weil sich kein Grund angeben läßt, warum sie gerade der eine und nicht auch die andere enthalten solle; sie muß folglich ein Produkt derselben seyn. Die Endgleichung ist also keine andere als

$$(\psi)\ldots\left\{\begin{array}{l}(x'-\xi')\,(x'-\xi'')\,(x'-\xi''')\ldots\times\\(x''-\xi')\,(x''-\xi'')\,(x''-\xi''')\ldots\times\\(x'''-\xi')\,(x'''-\xi'')\,(x'''-\xi''')\ldots\times\\\qquad\qquad\text{ꝛc.}\end{array}\right\}=0$$

Der erste Theil dieser Gleichung erleidet keine Veränderung, wie man auch die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. unter einander vertauschen mag; er ist also symmetrisch in Beziehung auf x', x'', x''', ꝛc. Da derselbe aber auch keine Veränderung erleidet, wenn man ξ', ξ'', ξ''', ꝛc. unter einander vertauscht, so ist er auch symmetrisch in Beziehung auf ξ', ξ'', ξ''', ꝛc. Es läßt sich also der erste Theil der Gleichung (ψ) jedesmal rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen ausdrücken.

Ich werde nachher zeigen, wie man der Gleichuug (ψ) eine zur Berechnung schicklichere Form geben könne, vorher aber das Vorgetragene durch einige Aufgaben erläutern.

§ 72.

Aufg. Aus den beyden Gleichungen

$$\text{I. } x^2 - Ax + B = 0$$

$$\text{II. } x^2 - A'x + B' = 0$$

worin A, B, A', B', gegebene Funktionen von y sind, das x' nach der Methode des vor. §'s zu eliminiren.

Aufl. 1) Die Gleichung (ψ) des vor. §'s wird hier, da beyde Gleichungen vom zweiten Grade sind,

$$(x'-x')(x'-x'')(x''-x')(x''-x'') = 0$$

oder

$$(x'^2-x'(x'+x'')+x'x'')(x''^2-x''(x'+x'')+x'x'') = 0$$

oder, da $x'+x''=A'$, $x'x''=B'$

$$(x'^2-x'A'+B')(x''^2-x''A'+B') = 0$$

2) Multiplicirt man wirklich, so erhält man

$$x'^2x''^2-(x'x''^2+x'^2x'')A'+(x'^2+x''^2)B'$$
$$+x'x''A'^2-(x'+x'')A'B'+B'^2 = 0$$

oder da $x'+x''=[1]=A$, $x'x''=[1^2]=B$,
$x'x''^2+x'^2x''=[12]=AB$, $x'^2+x''^2=[2]=A^2-2B$,

$$B^2-ABA'+(A^2-2B)B'+BA'^2-AA'B'+B'^2 = 0$$

und diese Gleichung ist die gesuchte Endgleichung, welche man auch erhalten haben würde, wenn man auf die gewöhnliche Art eliminirt hätte.

§ 73.

Aufg. Aus den gegebenen Gleichungen

$$\text{I. } x^3-Ax^2+Bx-C=0$$
$$\text{II. } x^2-A'x+B'=0$$

das x nach der Methode § 71 zu eliminiren.

Aufl. 1) Die Gleichung (ψ) § 71 wird hier

$$(x'-x')(x'-x'')(x''-x')(x''-x'')$$
$$(x'''-x')(x'''-x'') = 0$$

oder

$$(x'^2-x'(x'+x'')+x'x'')(x''^2-x''(x'+x'')+x'x'')$$
$$(x'''^2-x'''(x'+x'')+x'x'') = 0$$

oder, da $x'+x''=A'$, $x'x''=B'$

$$(x'^2-x'A'+B')(x''^2-x''A'-B')$$
$$(x'''^2-x'''A'+B') = 0$$

2) Die wirkliche Multiplikation der drey Faktoren im ersten Theile dieser Gleichung giebt

$$[1^3]^2 - [12^2]A' + [2^2]B' + [1^2 2]A'^2 - [12]A'B' + [2]B'^2 - [1^3]A'^3 + [1^2]A'^2B' - [1]A'B'^2 + B'^3 = 0$$

oder, wenn für die Summenausdrücke ihre Werthe aus den angehängten Tafeln gesetzt werden,

$$C^2 - BCA' + (B^2 - 2AC)B' + ACA'^2 - (AB - 3C)A'B' + (A^2 - 2B)B'^2 - CA'^3 + BA'^2B' - AA'B'^2 + B'^3 = 0$$

welche die gesuchte Endgleichung ist.

§ 74.

Aufg. Aus den gegebenen Gleichungen

I. $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0$

II. $x^n - A'x^{n-1} + B'x^{n-2} - C'x^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$

das x nach der Methode § 71 zu eliminiren.

Aufl. 1) Da x', x'', x''', ꝛc. die Wurzeln der Gleichung II sind, so ist

$$(x - x')(x - x'')(x - x''') \ldots\ldots = x^n - A'x^{n-1} + B'x^{n-2} - C'x^{n-3} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man hierin für x successive x', x'', x''', ꝛc. so wird

$$(x' - x')(x' - x'')(x' - x''')\ \text{ꝛc.} = x'^n - A'x'^{n-1} + \text{ꝛc.}$$
$$(x'' - x')(x'' - x'')(x'' - x''')\ \text{ꝛc.} = x''^n - A'x''^{n-1} + \text{ꝛc.}$$
$$(x''' - x')(x''' - x'')(x''' - x''')\ \text{ꝛc.} = x'''^n - A'x'''^{n-1} + \text{ꝛc.}$$

2) Werden diese Werthe in der Gleichung (⚶) § 71 substituirt, so verwandelt sich dieselbe in

$$\left\{\begin{array}{l} (x'^n - A'x'^{n-1} + B'x'^{n-2} - C'x'^{n-3} + \text{ꝛc.}) \\ \times (x''^n - A'x''^{n-1} + B'x''^{n-2} - C'x''^{n-3} + \text{ꝛc.}) \\ \times (x'''^n - A'x'''^{n-1} + B'x'''^{n-2} - C'x'''^{n-3} + \text{ꝛc.}) \\ \times \text{ꝛc.} \qquad\qquad \text{ꝛc.} \end{array}\right\} = 0$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist nichts anders, als das Produkt aus allen den Ausdrücken, welche entstehen, wenn

man in der Gleichung II successive alle Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. der Gleichung I für x substituirt.

3) Man siehet aber sogleich, daß das gedachte Produkt durch keine Vertauschung der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. irgend eine Veränderung leidet, indem bey einer solchen Vertauschung bloß ein Faktor in den andern übergeht. Der erste Theil der Gleichung ist demnach nothwendig eine symmetrische Funktion der genannten Wurzeln, die sich also immer nach den bekannten Regeln daraus wegschaffen lassen. Man erhält auf diese Weise eine Gleichung, worin x nicht mehr vorkommt, und welche also die gesuchte Endgleichung ist. Aus dem Verfahren selbst ergiebt sich übrigens, daß sie vollständig ist, und nichts Fremdartiges enthält.

Anmerk. Die Aufgabe, aus zwey gegebenen Gleichungen mit zwei unbekannten Größen eine dieser Größen zu eliminiren, ist also nunmehr in ihrer ganzen Allgemeinheit aufgelöst. Die wirkliche Rechnung dürfte jedoch noch manche Schwierigkeit machen, wohin vorzüglich die Entwickelung des Produktes in dem ersten Theile der Gleichung in 2 und seine Reduktion auf Summenausdrücke gehört. Wie diesen Schwierigkeiten mit Hülfe kombinatorischer Mittel abzuhelfen ist, wird der folgende § lehren.

§ 75.

Aufg. Das Resultat der Elimination des x aus den beyden Gleichungen I und II des vor §'s unmittelbar völlig entwickelt darzustellen.

Aufl. 1) Der Gleichung II. des vor. §'s kann man durch die Division mit ihrem letzten Gliede immer die folgende Form geben:

$$1 + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + \dots + (n)x^n = 0$$

worin die Coefficienten (1), (2), (3), ... (n) gegebene Funktionen von y bezeichnen. Diese Bezeichnung wurde bloß deshalb gewählt, um die Anwendung kombinatorischer Operationen zu erleichtern, und das Gesetz der Glieder anschaulicher zu machen. Um ferner anzudeuten, daß zwey oder mehr solche Coefficienten mit einander multiplicirt werden sollen, werde ich die stellvertretenden Zahlen bloß in Klammern neben einander schreiben, und bey gleichen die Wiederholungsexponenten brauchen. Es bedeutet also z. B. (123), (2456), $(1^3 2^2)$, das erste das Produkt der Coefficienten (1), (2), (3); das zweyte das Produkt der Coefficienten (2), (4), (5), (6), und das dritte das Produkt der dritten Potenz des Coefficienten (1) in die zweite Potenz des Coefficienten (2).

2) Man setze nun, wie im vor. § gelehrt worden, nach einander x', x'', x''', ꝛc. für x, so erhält der erste Theil der Gleichung in 2 das. die folgende Form:

$$[1+(1)x' + (2)x'^2 + (3)x'^3 + (4)x'^4 + (5)x'^5 + \text{ꝛc.}]$$
$$\times[1+(1)x'' + (2)x''^2 + (3)x''^3 + (4)x''^4 + (5)x''^5 + \text{ꝛc.}]$$
$$\times[1+(1)x''' + (2)x'''^2 + (3)x'''^3 + (4)x'''^4 + (5)x'''^5 + \text{ꝛc.}]$$
$$\text{ꝛc.}$$

Die Anzahl der Faktoren, welche hier vorkommen, ist dem Grade der Gleichung I gleich, also = m.

3) Man mache zuerst das Produkt der beyden ersten Faktoren, so erhält man

$$1 + (1)(x'+x'') + (2)(x'^2+x''^2) + (3)(x'^3+x''^3)$$
$$+ (1^2)(x'x'') \quad + (12)(x'x''^2 + x'^2x'')$$
$$+ (4)(x'^4 + x''^4) \quad + (5)(x'^5 + x''^5) \quad + \text{ꝛc.}$$
$$+ (13)(x'x''^3 + x'^3x'') \quad + (14)(x'x''^4 + x'^4x'')$$
$$+ (2^2)(x'^2x''^2) \quad + (23)(x'^2x''^3 + x'^3x''^2)$$

4) Wäre mithin die Gleichung I nur von dem zweyten

Grade,

Grade, so ließe sich dies Produkt durch Summenausdrücke wie folgt darstellen:

$$1+(1)[1]+(2)[2]+(3)[3]+(4)[4]+(5)[5]+\text{rc.}$$
$$+(1^2)[1^2]+(12)[12]+(13)[13]+(14)[14]$$
$$+(2^2)[2^2]+(23)[23]$$

5) Man multiplicire nun das Produkt in 3 mit dem dritten Faktor in 2, so erhält man, wenn die Glieder gehörig geordnet werden, das Produkt

$$1+(1)(x'+x''+x''')+(2)(x'^2+x''^2+x'''^2)$$
$$+(1^2)(x'x''+x'x'''+x''x''')$$

$$+(3)(x'^3+x''^3+x'''^3)$$
$$+(12)\begin{pmatrix}x'x''^2+x'^2x''+x'x'''^2+\\ x'^2x'''+x''x'''^2+x''^2x'''\end{pmatrix}$$
$$+(1^3)(x'x''x''')$$

$$+(4)(x'^4+x''^4+x'''^4)$$
$$+(13)\begin{pmatrix}x'x''^3+x'^3x''+x'x'''^3+\\ x'^3x'''+x''x'''^3+x''^3x'''\end{pmatrix}$$
$$+(2^2)(x'^2x''^2+x'^2x'''^2+x''^2x'''^2)$$
$$+(1^2 2)(x'x''x'''^2+x'x''^2x'''+x'^2x''x''')$$

$$+(5)(x'^5+x''^5+x'''^5)$$
$$+(14)\begin{pmatrix}x'x''^4+x'^4x''+x'x'''^4+\\ x'^4x'''+x''x'''^4+x''^4x'''\end{pmatrix}$$
$$+(23)\begin{pmatrix}x'^2x''^3+x'^3x''^2+x'^2x'''^3+\\ x'^3x'''^2+x''^2x'''^3+x''^3x'''^2\end{pmatrix}$$
$$+(1^2 3)(x'x''x'''^3+x'x''^3x'''+x'^3x''x''')$$
$$+(12^2)(x'x''^2x'''^2+x'^2x''x'''^2+x'^2x''^2x''')$$

6) Ist daher die Gleichung I nur vom dritten Grade, so läßt sich das Produkt in 2 wie folgt darstellen:

$$1+(1)[1]+(2)[2]+(3)[3]+(4)[4]+(5)[5]+ \text{ꝛc.}$$
$$+(1^2)[1^2]+(12)[12]+(13)[13]+(14)[14]$$
$$+(1^3)[1^3]+(2^2)[2^2]+(23)[23]$$
$$+(1^2 2)[1^2 2]+(1^2 3)[1^2 3]$$
$$+(12^2)[12^2]$$

7) Es ist nicht nöthig, die Multiplikation weiter fortzusetzen, da sich schon aus den gefundenen Produkten das Gesetz sehr leicht erkennen läßt. Man siehet nämlich sogleich, daß die Ziffern in den Parenthesen und in den Haken immer dieselben, und auf dieselbe Art zusammengesetzt sind. Was aber die eingeschlossenen Ziffernkomplexionen an sich betrifft, so sind diese nichts anders, als alle mögliche Zahlenzerfällungen für die Summen 1, 2, 3, 4, ... mn. Ich sage — alle mögliche Zahlenzerfällungen —; denn daß, wie z. B. in den Produkten in 4 und 6, einige fehlen, dies rührt bloß davon her, daß die Summenausdrücke für solche Zerfällungen bey dem angenommenen Grade der Gleichung I nicht statt haben können, weil zu ihrer Bildung mehr Wurzeln erfordert werden, als diese Gleichung haben kann. Ueberhaupt werden, so bald man mit besonderen Gleichungen zu thun hat, alle diejenigen Zerfällungen fehlen, für welche entweder die Summenausdrücke, oder die Coefficientenprodukte nicht statt haben können.

8) Wie alle mögliche Zerfällungen der Zahlen leicht gefunden werden können, ohne sich der Gefahr auszusetzen, eine zu übergehen, lehrt die kombinatorische Analysis. Um also das Resultat der Elimination des x aus den beyden Gleichungen

$$\text{I. } x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$\text{II. } 1 + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + \ldots + (n)x^n = 0$$

zu finden, hat man folgende Regeln zu beobachten:

a) Man zerfälle die Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . . . mn auf alle mögliche Arten.

b) Aus jeder solchen Zerfällung $\alpha\beta\gamma\delta$ . . . bilde man ein Glied von der Form $(\alpha\beta\gamma\delta \ldots)[\alpha\beta\gamma\delta \ldots]$.

c) Bezeichnet man alsdann die Summe aller dieser Glieder durch S, so ist

$$1 + S = 0$$

die gesuchte Endgleichung.

9) Die Summenausdrücke beziehen sich sämmtlich auf die Gleichung I, und können theils aus den angehängten Tafeln genommen, theils nach den, in den beyden ersten Abschnitten gelehrten Methoden, berechnet werden. Es bleibt nun nichts weiter übrig, als dieses Verfahren durch einige Beyspiele zu erläutern.

§ 76.

Beysp. I. Das Resultat der Elimination des x aus den beyden Gleichungen

$$\text{I. } x^2 - Ax + B = 0$$
$$\text{II. } \mathfrak{A}x^5 + \mathfrak{B}x^4 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^2 + \mathfrak{E}x + \mathfrak{F} = 0$$

zu finden.

Man gebe zuvörderst der Gleichung II die Form $1+(1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + (4)x^4 + (5)x^5$; d. h. man setze $(1) = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$, $(2) = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{F}}$, $(3) = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{F}}$, $(4) = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{F}}$, $(5) = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{F}}$. Da nun hier die Gleichung I nur von dem zweyten Grade ist, so brauchen die Zerfällungen nicht über die Binionen hinaus getrieben zu werden, weil die Summenausdrücke für höhere Classen nicht statt haben können (§ 75. 7). Die Endgleichung erhält daher die folgende Form:

$$
\begin{aligned}
o = 1 &+ (1)[1] + (2)[2] + (3)[3] + (4)[4] + (5)[5] \\
&+ (1^2)[1^2] + (12)[12] + (13)[13] + (14)[14] \\
&+ (2^2)[2^2] + (23)[23] \\
&+ (15)[15] + (25)[25] + (35)[35] + (45)[45] + (5^2)[5^2] \\
&+ (24)[24] + (34)[34] + (4^2)[4^2] \\
&+ (3^2)[3^2]
\end{aligned}
$$

Oder, wenn man die Summenausdrücke aus den Tafeln nimmt, für die Zeichen (1), (2), (3), (4), (5) ihre Werthe setzt, und hierauf die ganze Gleichung mit $\mathfrak{F}^2$ multiplicirt,

$$
\begin{aligned}
o = \mathfrak{F}^2 &+ \mathfrak{E}\mathfrak{F}A + \mathfrak{D}\mathfrak{F}(A^2 - 2B) + \mathfrak{C}\mathfrak{F}(A^3 - 3AB) \\
&+ \mathfrak{E}^2 B + \mathfrak{D}\mathfrak{E}AB \\
&+ \mathfrak{B}\mathfrak{F}(A^4 - 4A^2B + 2B^2) + \mathfrak{A}\mathfrak{F}(A^5 - 5A^3B + 5AB^2) \\
&+ \mathfrak{C}\mathfrak{E}(A^2B - 2B^2) + \mathfrak{B}\mathfrak{E}(A^3B - 3AB^2) \\
&+ \mathfrak{D}^2B^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}AB^2 \\
&+ \mathfrak{A}\mathfrak{E}(A^4B - 4A^2B^2 + 2B^3) + \mathfrak{A}\mathfrak{D}(A^3B^2 - 3AB^3) \\
&+ \mathfrak{B}\mathfrak{D}(A^2B^2 - 2B^3) + \mathfrak{B}\mathfrak{C}AB^3 \\
&+ \mathfrak{C}^2B^3 \\
&+ \mathfrak{A}\mathfrak{C}(A^2B^3 - 2B^4) + \mathfrak{A}\mathfrak{B}AB^4 + \mathfrak{A}^2B^5 \\
&+ \mathfrak{B}^2B^4
\end{aligned}
$$

Beysp. II. Es seyen die beyden Gleichungen

$$\text{I.} \quad x^3 - Ax^2 + Bx - C = o$$

$$\text{II.} \quad \mathfrak{A}x^3 + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x + \mathfrak{D} = o$$

gegeben.

Bringt man die Gleichung II. unter die Form $1 + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3$; so ist $(1) = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, $(2) = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, $(3) = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}}$. Da hier die Gleichung I von dem dritten Grade ist, so braucht man die Zerfällungen nicht über die dritte Classe fortzusetzen. Die Endgleichung hat also die Form

$$0 = 1 + (1)[1] + (2)[2] + (3)[3] + (13)[13] + (23)[23]$$
$$+ (1^2)[1^2] + (12)[12] + (2^2)[2^2] + (1^23)[1^23]$$
$$+ (1^3)[1^3] + (1^22)[1^22] + (12^2)[12^2]$$

$$+ (3^2)[3^2] + (13^2)[13^2] + (23^2)[23^2] + (3^3)[3^3]$$
$$+ (123)[123] + (2^23)[2^23]$$
$$+ (2^3)[2^3]$$

oder, wenn man für die Summenausdrücke und für die Zeichen (1), (2), (3), ihre Werthe setzt, und hierauf mit $\mathfrak{D}^3$ multiplicirt

$$0 = \mathfrak{D}^3 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 A + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 (A^2 - 2B) + \mathfrak{A}\mathfrak{D}^2 (A^3 - 3AB + 3C)$$
$$+ \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}B \qquad + \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}(AB - 3C)$$
$$+ \mathfrak{C}^3 C$$

$$+ \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}(A^2B - 2B^2 - AC) + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}(AB^2 - 2A^2C - BC)$$
$$+ \mathfrak{B}^2\mathfrak{D}(B^2 - 2AC) \qquad + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^2(A^2C - 2BC)$$
$$+ \mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 AC \qquad + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}BC$$

$$+ \mathfrak{A}^2\mathfrak{D}(B^3 - 3ABC + 3C^2) + \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}(B^2C - 2AC^2)$$
$$+ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}(ABC - 3C^2) \qquad + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 AC^2$$
$$+ \mathfrak{B}^3 C^2$$

$$+ \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}BC^2 + \mathfrak{A}^3 C^3$$

Um den Gebrauch dieser Formel an einem besondern Falle zu zeigen, will ich annehmen, es wären die beyden Gleichungen

$$x^3 - 2ax^2 + 4ayx - y^3 = 0$$
$$ax^2 + y^2x - ay^2 = 0$$

gegeben. Vergleicht man dieselben mit den Gleichungen I, II, so findet man $A = 2a$, $B = 4ay$, $C = y^3$, $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = a$, $\mathfrak{C} = y^2$, $\mathfrak{D} = -ay^2$. Da hier $\mathfrak{A} = 0$, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$= \mathfrak{D}^3 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 A + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 (A^2 - 2B) + \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} (AB - 3C)$$
$$+ \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}B \qquad + \mathfrak{C}^3 C$$
$$+ \mathfrak{B}^2\mathfrak{D} (B^2 - 2AC) + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}BC + \mathfrak{B}^3 C^2$$
$$+ \mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 AC$$

und diese Gleichung gilt überhaupt für jeden Fall, wo die eine der gegebenen Gleichungen vom dritten, und die andere vom zweyten Grade ist. Macht man hierin die erforderlichen Substitutionen, so erhält man die gesuchte Endgleichung

$$y^9 + a^2y^7 + 6a^3y^6 - 12a^4y^5 - 12a^5y^4 = 0$$

oder

$$y^5 + a^2y^3 + 6a^3y^2 - 12a^4y - 12a^5 = 0$$

§ 77.

Die Methode, mit Hülfe der symmetrischen Funktionen die Endgleichung zu finden, rührt ursprünglich von Euler her, der sie in den Memoiren der Berliner Akademie für das Jahr 1748 zuerst lehrte, und sie auf einige leichte Beyspiele anwandte. Kurze Zeit nachher gab ihr Cramer, in dem zweyten Anhange zu seiner 1750 erschienenen Introduction à l'analyse des lignes courbes, p. 660 u. f. durch eine passende Bezeichnungsart, die ich zum Theil angenommen habe, eine größere Ausdehnung und mehr Leichtigkeit in der Behandlung. Beyde große Männer hatten dabey hauptsächlich die Absicht, zu erweisen, daß zwey Linien, die eine von der mten, die andere von der nten Ordnung, sich in nicht mehr als mn Punkte schneiden können. Der Beweis selbst gehört nicht hierher, sondern in die höhere Geometrie. Es ist schon genug, wenn man weiß, daß derselbe einzig und allein auf dem folgenden Lehrsatz beruhet, und eine leichte und unmittelbare Folgerung aus demselben ist.

§ 78.

Lehrsatz. Wenn in den beyden Gleichungen

$$\text{I.}\quad x^m + \overset{1}{A}x^{m-1} + \overset{2}{A}x^{m-2} + \overset{3}{A}x^{m-3} + \ldots + \overset{m}{A} = 0$$

$$\text{II.}\quad x^n + \overset{1}{A}{}'x^{n-1} + \overset{2}{A}{}'x^{n-2} + \overset{3}{A}{}'x^{n-3} + \ldots + \overset{n}{A} = 0$$

zwischen zwey Größen x, y, die Coefficienten $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A} \ldots \overset{m}{A}$, $\overset{1}{A}{}', \overset{2}{A}{}', \overset{3}{A}{}' \ldots \overset{n}{A}{}'$, lauter ganze rationale Funktionen von y sind, und zwar $\overset{1}{A}$ und $\overset{1}{A}{}'$ vom ersten Grade, $\overset{2}{A}$ und $\overset{2}{A}{}'$ vom zweyten Grade, $\overset{3}{A}$ und $\overset{3}{A}{}'$ vom dritten Grade, u. s. w.: so kann die Endgleichung in y, welche aus der Elimination des x entstehet, nie den Grad mn übersteigen.

Bew. 1) Es seyen x', x'', x''', ꝛc. die Wurzeln der Gleichung I, so ist $-[1] = \overset{1}{A}$, $[2] = \overset{1}{A}{}^2 - 2\overset{2}{A}$, $-[3] = \overset{1}{A}{}^3 - 3\overset{1}{A}\overset{2}{A} + 3\overset{3}{A}$, u. s. w.: woraus man siehet, daß [1] keine höhere Potenz von y als y^1, [2] keine höhere als y^2, [3] keine höhere als y^3 enthält, und es läßt sich auch mit geringer Mühe aus der Natur der Formeln § 8 streng erweisen, daß bey der vorausgesetzten Beschaffenheit der Coefficienten $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}$, ꝛc. überhaupt der Summenausdruck $[\mu]$ keine höhere Potenz von y enthalten wird, als y^μ.

2) Es kann ferner kein Ausdruck von der Form $[\alpha\beta\gamma\delta\ldots]$ irgend eine höhere Potenz von y, als $y^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\ldots$ enthalten. Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellet aus 1 verbunden mit § 24. Anmerk.

3) Nach § 74 ist der erste Theil der Endgleichung (der andere ist $= 0$) das Produkt der m Faktoren

$$x'^{n} + \overset{1}{A'}x'^{n-1} + \ldots\ldots + \overset{n-\mu}{A'}x'^{\mu} + \ldots\ldots + \overset{n}{A'}$$

$$x''^{n} + \overset{1}{A'}x''^{n-1} + \ldots\ldots + \overset{n-\nu}{A'}x''^{\nu} + \ldots\ldots + \overset{n}{A'}$$

$$x'''^{n} + \overset{1}{A'}x'''^{n-1} + \ldots\ldots + \overset{n-\pi}{A'}x'''^{\pi} + \ldots\ldots + \overset{n}{A'}$$

ꝛc.

nachdem man daraus die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. vermittelst der Coefficienten der Gleichung I eliminirt hat.

4) Das allgemeine Glied dieses Produktes ist

$$\overset{n-\mu}{A'}\ \overset{n-\nu}{A'}\ \overset{n-\pi}{A'}\ \text{ꝛc.}\ x'^{\mu}x''^{\nu}x'''^{\pi}\ldots$$

Da nun das Produkt eine symmetrische Funktion von x', x'', x''', ꝛc. seyn muß, so gehört jenes Glied nothwendig zu

$$\overset{n-\mu}{A'}\ \overset{n-\nu}{A'}\ \overset{n-\pi}{A'}\ \text{ꝛc.}\ [\mu\nu\pi\ldots]$$

5) Es ist aber nach 2 der höchste Exponent von y in $[\mu\nu\pi\ldots]$ der Summe der Wurzelexponenten $\mu+\nu+\pi+\ldots$ gleich; ferner ist, der Voraussetzung gemäß, $n-\mu$ der höchste Exponent von y in $\overset{n-\mu}{A'}$, $n-\nu$ der höchste in $\overset{-\nu}{A'}$, $n-\pi$ der höchste in $\overset{n-\pi}{A'}$, ꝛc., also $mn-(\mu+\nu+\pi+$ ꝛc.$)$ der höchste in dem Produkte $\overset{n-\mu}{A'}\ \overset{n-\nu}{A'}\ \overset{n-\pi}{A'}$ ꝛc. Aus beydem folgt aber, daß mn der höchste Exponent von y in dem Gliede $\overset{n-\mu}{A'}\ \overset{n-\nu}{A'}\ \overset{n-\pi}{A'}$ ꝛc. $[\mu\nu\pi\ldots]$ sey, und daß also in diesem Gliede keine höhere Potenz von y als y^{mn} vorkommen kann.

6) Da nnn das, was hier von einem unbestimmten Gliede erwiesen worden, für jedes Glied insbesondere gilt, so folgt, daß in der Endgleichung keine höhere Potenz von y, als y^{mn} vorkommen kann.

§ 79.

Wenn mehr als zwey Gleichungen mit mehr als zwey unbekannten Größen gegeben sind, so giebt es im Allgemeinen

kein anderes Mittel, als auf die gewöhnliche Weise diese Gleichungen zu zwey und zwey mit einander zu verbinden, und so eine unbekannte Größe nach der andern wegzuschaffen. Mit Recht bemerkt aber Bezout in dem oben angeführten Werke, daß dieses Verfahren sehr mangelhaft sey, indem sich bey den successiven Eliminationen eine Menge unnützer Faktoren einschleichen, wodurch nicht allein die Arbeit vergrößert, sondern auch der Grad der Endgleichung um vieles höher wird, als er seyn sollte, und, was das Schlimmste ist, daß sich diese Faktoren oft nicht eher als nach vollbrachter Rechnung zeigen. Da aber diese Schwierigkeiten selbst nach der Bezoutschen Methode nicht anders, als durch die Betrachtung einer großen Menge einzelner Fälle gehoben werden können, ein solches Detail aber weder der Zweck noch die Grenzen dieses Werkes gestatten, so werde ich mich gegenwärtig auf diese Untersuchungen nicht einlassen, behalte mir jedoch vor, es zu einer andern Zeit zu thun.

Tschirnhausen hat in den Actis Eruditorum für das Jahr 1683 eine Methode zur Auflösung der Gleichungen gegeben, die sich ganz auf Eliminationen gründet. Es kommt bey dieser Methode darauf an, die gegebene Gleichung vermittelst einer angenommenen Hülfsgleichung in eine andere zu verwandeln, die eine beliebige Anzahl unbestimmter Größen enthält, durch deren gehörige Bestimmung es möglich wird, so viele Glieder wegzuschaffen als man will, und ihr dadurch die Form einer zweygliedrigen, einer quadratischen, einer kubischen, oder einer jeden andern Gleichung zu geben, deren Auflösung schon bekannt ist, oder als bekannt angesehen wird. Ihr Erfinder hielt sie für allgemein, und sie ist es wirklich; nur erfordert ihre Anwendung oft die Auflösung höherer Gleichungen, als die gegebene selbst. Die folgenden Aufgaben werden das Gesagte erläutern.

§ 80.

Aufg. Es sind die beyden Gleichungen

$$\text{I. } x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{rc.} = 0$$

$$\text{II. } y + A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{rc.} = 0$$

gegeben, worin die Coefficienten a, b, c, rc. A, B, C, rc. weder x noch y enthalten: man soll den Grad der Endgleichung in y bestimmen, welche durch die Elimination des x erhalten wird.

Aufl. Es seyen x', x'', x''', rc. die Wurzeln der Gleichung I; alsdann ist nach § 74 der erste Theil der Endgleichung (der andere ist $=0$) das Produkt von den folgenden m Faktoren:

$$y + A + Bx' + Cx'^2 + Dx'^3 + \text{rc.}$$
$$y + A + Bx'' + Cx''^2 + Dx''^3 + \text{rc.}$$
$$y + A + Bx''' + Cx'''^2 + Dx'''^3 + \text{rc.}$$
$$\text{rc.}$$

Da nun in diesen Faktoren y nirgend wo anders, als im ersten Gliede vorkommt, so kann in dem Produkte keine höhere Potenz von y als y^m vorkommen. Die Gleichung in y ist also nothwendig vom m ten Grade, und also immer von demselben Grade als die Gleichung I, von welchem Grade auch übrigens die Gleichung II seyn mag.

Zus. Ist also eine Gleichung

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{rc.} = 0$$

gegeben, so kann man dieselbe auf unendlich viele Arten in eine andere von dem nämlichen Grade verwandeln. Man darf zu dem Ende nur eine Hülfsgleichung von der Form

$$y + A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{rc.}$$

nach Willkühr annehmen, und aus den beyden Gleichungen das x eliminiren. Da nun sowohl der Grad, als die Coeffi-

cienten der Hülfsgleichung unbestimmt gelassen worden, so kann man beydes jedesmal so bestimmen, wie es die Form erfordert, welche man der transformirten Gleichung zu geben gesonnen ist. Wollte man z. B. die Gleichung vom zweyten Grade $x^2 + ax + b = o$ auf die Form $y^2 + K = o$ reduciren, so nehme man die Hülfsgleichung $y + A + x = o$. Durch die Eliminirung des x aus dieser und der gegebenen Gleichung erhält man $y^2 + (2A - a) y + A^2 - aA + b = o$. Da nun das zweyte Glied verschwinden soll, so hat man $2A - a = o$, und $A = \frac{1}{2}a$; und durch diesen Werth des A verwandelt sich die Hülfsgleichung in $y + \frac{1}{2}a + x = o$, und die transformirte in $y^2 - \frac{1}{4}a^2 + b = o$. Die letztere giebt $y = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$, und wird dieser Werth in der ersten substituirt, so erhält man $x = -\frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$, wie erfordert wird.

§ 81.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + ax^2 + bx + c = o$$

auf eine Gleichung von der Form $y^3 + K = o$ zu reduciren.

Aufl. 1) Da die transformirte Gleichung die Form $y^3 + K = o$ erhalten soll, worin das zweyte und dritte Glied fehlt, so muß eine Hülfsgleichung mit zwey unbestimmten Coefficienten angenommen werden, um dieselben nach verrichteter Elimination so zu bestimmen, wie es jene Bedingung erfordert. Es sey daher

$$y + A + Bx + x^2 = o$$

diese Hülfsgleichung.

2) Um nun aus den beiden Gleichungen

$$\text{I.} \quad x^3 + ax^2 + bx + c = o$$

$$\text{II.} \quad y + A + Bx + x^2 = o$$

das x zu eliminiren, vergleiche man dieselben mit den Gleichungen I, II, im zweyten Beyspiele § 76. Diese Vergleichung giebt $A = -a$, $B = b$, $C = -c$, $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{C} = B$, $\mathfrak{D} = y + A$. Die daselbst gefundene Endgleichung verwandelt sich daher in die folgende:

$$(y + A)^3 - (aB - a^2 + 2b)(y + A)^2 + (bB^2 + (3c - ab)B + b^2 - 2ac)(y + A) - cB^3 + acB^2 - bcB + c^2 = 0$$

3) Wenn man hierin die Potenzen von $y + A$ entwickelt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$y^3 + Hy^2 + Iy + K = 0.$$

und es ist

$$H = 3A - aB + a^2 - 2b$$
$$I = 3A^2 - 2A(aB - a^2 + 2b) + bB^2 + (3c - ab)B + b^2 - 2ac$$
$$K = A^3 - aA^2B + bAB^2 - cB^3 + (a^2 - 2b]A^2 + (3c - ab)AB + acB^2 + (b^2 - 2ac)A - bcB + c^2$$

4) Soll nun diese Gleichung sich auf $y^3 + K = 0$ reduciren, so muß man H und $I = 0$ setzen; dies giebt die beyden Gleichungen

$$3A - aB + a^2 - 2b = 0$$
$$3A^2 - 2A(aB - a^2 + 2b) + bB^2 + (3c - ab)B + b^2 - 2ac = 0$$

Da die erste dieser Gleichungen vom ersten, und die zweyte vom zweyten Grade in Hinsicht auf A und B ist, so kann man diese Coefficienten durch die Auflösung einer Gleichung des zweyten Grades finden, und die Substitution dieser Werthe in dem Ausdrucke für K giebt K, und somit auch die reducirte Gleichung $y^3 + K = 0$.

Zus. Hat man die reducirte Gleichung gefunden, so lassen sich auch die Wurzeln der gegebenen Gleichung finden.

Aus $y^3 + K = 0$ erhält man nämlich, wenn 1, α, β, die drey Cubikwurzeln der Einheit bezeichnen, $y = -\sqrt[3]{K}$, $y = -\alpha\sqrt[3]{K}$, $y = -\beta\sqrt[3]{K}$. Werden diese Werthe von y nebst den Werthen von A und B in der Hülfsgleichung substituirt, so erhält man die gesuchten Werthe des x durch Auflösung von Gleichungen des zweyten Grades.

Anmerk. Da die Werthe von A und B von Gleichungen des zweyten Grades abhängen, so bekommt man eigentlich zwey mal zwey korrespondirende Werthe derselben. Da nun jede zwey korrespondirende Werthe mit einem jeden der drey Werthe von y verbunden werden können, so geben diese Substitutionen sechs verschiedene Gleichungen des zweyten Grades. Jede derselben giebt zwey Werthe des x, und folglich erhält man überhaupt zwölf Werthe des x, da doch die gegebene Gleichung nicht mehr als drey Wurzeln haben kann.

Man muß aber bedenken, daß nur diejenigen Werthe von x genommen werden dürfen, welche die beyden Gleichungen I, II, zugleich wahr machen. Um diese Werthe zu finden, darf man daher nur den gemeinschaftlichen Theiler von $x^3 + ax^2 + bx + c$ und $x^2 + Bx + A + y$ auf dem gewöhnlichen Wege suchen. Die Division des ersten Ausdrucks durch den zweyten giebt den Quotienten $x + a - B$ und den Rest

$$(B^2 - aB + b - A - y)\,x + (B - a)\,(A + y) + c.$$

Dieser Rest muß verschwinden. Man hat also

$$(B^2 - aB + b - A - y)\,x + (B - a)\,(A + y) + c = 0$$

und hieraus erhält man

$$x = -\frac{(B - a)\,(A + y) + c}{B^2 - aB + b - A - y}$$

Substituirt man hierin für A, B, ihre Werthe aus den Gleichungen in 4, desgleichen für y successive seine drey Werthe

$-\sqrt[3]{K}$, $-\alpha\sqrt[3]{K}$, $-\beta\sqrt[3]{K}$, so erhält man drey Werthe von x, welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung seyn werden. Uebrigens ist es hierbey gleichgültig, welche von den korrespondirenden Werthen von A und B man brauchen will, weil sie immer die nämlichen Werthe von x geben, wovon man sich durch die wirkliche Ausrechnung leicht überzeugen kann.

§ 82.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in eine andere von der Form $y^4 + Hy^2 + K = 0$ zu verwandeln.

Aufl. 1) Da die transformirte Gleichung die Form $y^4 + Hy^2 + K = 0$ erhalten soll, worin zwey Glieder fehlen, nämlich das zweyte und vierte Glied, so muß eine Hülfsgleichung mit zwey willkührlichen Größen angenommen werden. Es sey daher

$$y + A + Bx + x^2 = 0$$

diese Hülfsgleichung.

2) Um nun aus

$$\text{I. } y + A + Bx + x^2 = 0$$

$$\text{II. } y^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

das x zu eliminiren, braucht man nur diese Gleichungen mit denen des ersten Beyspiels in § 76 zu vergleichen; man findet alsdann $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{C} = a$, $\mathfrak{D} = b$, $\mathfrak{E} = c$, $\mathfrak{F} = d$, $A = -B$, $B = y + A$. Macht man also diese Substitutionen in der daselbst gefundenen Endgleichung, so verwandelt sich dieselbe dadurch in eine Gleichung von der Form

$$(y+A)^4 + P(y+A)^3 + Q(y+A)^2 + R(y+A) + S = 0$$

und zwar ist

$$P = -aB + a^2 - 2b$$

$$Q = bB^2 + (3c - ab)B + b^2 - 2ac + 2d$$

$$R = -cB^3 + (ac - 4d)B^2 + (3ad - bc)B + c^2 - 2bd$$

$$S = dB^4 - adB^3 + bdB^2 - cdB + d^2$$

3) Ordnet man diese Gleichung nach y, so erhält man

$$y^4 + (4A + P)y^3 + (6A^2 + 3PA + Q)y^2 + (4A^3 + 3PA^2 + 2QA + R)y + A^4 + PA^3 + QA^2 + RA + S = 0$$

worin man nach Gefallen zwey Glieder verschwinden lassen kann, wenn man nur die Buchstaben A, B, dem gemäß bestimmt.

4) Um nun, wie die Aufgabe fordert, das zweyte und vierte Glied verschwinden zu lassen, setze man

$$4A + P = 0$$

$$4A^3 + 3PA^2 + 2QA + R = 0$$

5) Die erste giebt $A = -\frac{P}{4}$, und bringt man diesen Werth in die andere Gleichung, so hat man nach Wegschaffung der Brüche

$$P^3 - 4PQ + 8R = 0.$$

Braucht man in dieser Gleichung die obigen Werthe von P, Q, R, so erhält man eine Gleichung für B vom dritten Grade, nämlich,

$$(4ab - a^3 - 8c)B^3 + (3a^4 - 14a^2b + 20ac + 8b^2 - 32d)B^2 + (-3a^5 + 16a^3b - 16ab^2 - 20a^2c + 32ad + 16bc)B + a^6 - 6a^4b + 8a^3c - 8a^2d + 8a^2b^2 - 16abc + 8c^2 = 0$$

Hat man aus dieser Gleichung B bestimmt, so darf man nur

den Werth desselben in den obigen Ausdrücken für P, Q, R, S, substituiren, um auch diese Coefficienten zu finden.

6) Die Gleichung in z verwandelt sich ferner, wenn man $-\frac{P}{4}$ für A setzt, in

$$y^4 - \left(\frac{3P^2}{8} - Q\right)y^2 - \frac{3P^4}{256} + \frac{QP^2}{16} - \frac{RP}{4} + S = 0$$

oder, wenn man für R seinen Werth $\frac{PQ}{2} - \frac{P^3}{8}$ setzt, in

$$y^4 - \left(\frac{3P^2}{8} - Q\right)y^2 + \frac{5P^4}{256} - \frac{QP^2}{16} + S = 0;$$

und diese Gleichung hat die Form $y^4 + Hy^2 + K = 0$, wie verlangt wurde.

Zus. Aus dieser transformirten Gleichung lassen sich nun die Wurzeln der Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ auf eine ähnliche Art, wie im vor. §. für die Gleichung des dritten Grades finden. Da nämlich die Gleichung in 5 drey Werthe für B, und die Substitution eines jeden dieser Werthe in der transformirten Gleichung vier Werthe von y giebt, so erhält man überhaupt zwölf Werthe für y. Jeder dieser Werthe von y nebst dem Werthe von B in der Hülfsgleichung

$x^2 + Bx + A + y = 0$, oder $x^2 + Bx - \frac{P}{4} + y = 0$ substituirt, giebt zwey Werthe für x, und man erhält daher überhaupt 24 Werthe von x. Um nun zu erfahren, welche von diesen Werthen zugleich Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, muß man den gemeinschaftlichen Theiler der beyden Ausdrücke $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x^2 + Bx - \frac{P}{4} + y$ suchen. Zu dem Ende dividire man den ersten Ausdruck durch den letzten so lange, bis man zu einem Reste kommt, der x nur in der

ersten

erste Potenz enthält: dieser Rest muß = o seyn. Auf diese Art erhält man die Gleichung

$$[B^3 - aB^2 + bB - c - (a - 2B)(y - \frac{p}{4})]x$$

$$+ (B^2 - aB + b)(y - \frac{p}{4}) - (y - \frac{p}{4})^2 - d = o$$

und hieraus

$$x = \frac{d - (B^2 - aB + b)(y - \frac{p}{4}) + (y - \frac{p}{4})^2}{B^3 - aB^2 + bB - c - (a - 2B)(y - \frac{p}{4})}$$

Substituirt man nun in diesem Ausdrucke des x für y seine vier Werthe aus der transformirten Gleichung, so erhält man die Wurzeln der gegebenen Gleichung, und zwar wird man immer dieselben vier Werthe für x finden, was für einen Werth von B man brauchen mag.

Anmerk. Aus diesem und den beyden vorhergehenden §en ergiebt sich nun wenigstens so viel, daß die Tschirnhausensche Methode wirklich zur Auflösung der Gleichungen des zweyten, dritten und vierten Grades führt, obgleich auf einem sehr beschwerlichen Wege. Ob, und in wie fern diese Methode auch auf höhere Grade anwendbar ist, soll weiter hin untersucht werden.

V. Von den Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ und ihrem Gebrauche bey dem Wegschaffen der Wurzelgrößen aus den Gleichungen. Methode, vermittelst derselben auflösbare Gleichungen zu erfinden, und noch einige andere damit verwandte Gegenstände.

§ 83.

Aufg. Eine Gleichung zu finden, welche bloß die imaginären Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ enthält.

Aufl. Es müssen hierbey zwey Fälle erwogen werden, nämlich 1) wenn n eine ungerade, 2) wenn n eine gerade Zahl ist.

1) Es sey n eine ungerade Zahl. In diesem Falle giebt es nicht mehr als eine reelle Wurzel, nämlich + 1, und es muß daher $x - 1$ ein Theiler von $x^n - 1$ seyn. Dividirt man also die Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch $x - 1$, und setzt den Quotienten = 0, so erhält man eine Gleichung, welche bloß die imaginären Wurzeln enthält, und diese ist

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

2) Es sey n eine gerade Zahl, also die gegebene Gleichung von der Form $x^{2m} - 1 = 0$. In diesem Falle hat sie nothwendig zwey reelle Wurzeln, nämlich + 1 und − 1, und nicht mehr. Es muß daher sowohl $x - 1$ als $x + 1$ ein

Theiler von $x^n - 1$ seyn, also auch das Produkt $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. Dividirt man daher die Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch $x^2 - 1$, so erhält man eine Gleichung, welche bloß die imaginären Wurzeln enthält, und diese ist

$$x^{n-2} + x^{n-4} + {}^{n-6} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 = 0$$

Zus. Um also die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ zu finden, muß man, wenn n eine ungerade Zahl ist, die Gleichung $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$, und wenn n eine gerade Zahl ist, die Gleichung $x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + x^2 + 1 = 0$, aufzulösen suchen. Die letztere läßt sich, da sie nur gerade Potenzen von x enthält, durch die Substitution von y für x^2, immer auf eine Gleichung von dem Grade $\frac{n-2}{2}$ reduciren.

Beisp. I. Die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ durch $x - 1$ dividirt, giebt

$$x^2 + x + 1 = 0$$

und aufgelöst, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Die drey Wurzeln jener Gleichung sind demnach

$$1, \quad \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Beysp. II. Die Gleichung $x^4 - 1 = 0$ durch $x^2 - 1$ dividirt, giebt

$$x^2 + 1 = 0$$

woraus man $x = \pm \sqrt{-1}$ erhält. Die vier Wurzeln der Geichung $x^4 - 1 = 0$ sind demnach

$$+1, \; -1, \; +\sqrt{-1}, \; -\sqrt{-1}$$

Beysp. III. Die Gleichung $x^5 - 1 = 0$ durch $x - 1$ dividirt, giebt

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich in zwei quadratische

$$x^2 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})\,x + 1 = 0$$
$$x^2 + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5})\,x + 1 = 0$$

zerlegen, und die Auflösung dieser beyden Gleichungen giebt folgende vier imaginäre Wurzeln:

$$\tfrac{1}{4}\,[-1-\sqrt{5}+\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,\sqrt{-1}]$$
$$\tfrac{1}{4}\,[-1-\sqrt{5}-\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,\sqrt{-1}]$$
$$\tfrac{1}{4}\,[-1+\sqrt{5}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\,\sqrt{-1}]$$
$$\tfrac{1}{4}\,[-1+\sqrt{5}-\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\,\sqrt{-1}]$$

Beysp. IV. Die Gleichung $x^6 - 1 = 0$ durch $x^2 - 1$ dividirt, giebt

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

und die Auflösung dieser Gleichung giebt $x = \pm\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}$

Die sechs Wurzeln der Gleichung $x^6 - 1 = 0$ sind demnach

$$+1 \qquad -1$$
$$+\sqrt{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}},\; -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$$
$$+\sqrt{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}},\; -\sqrt{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$$

§ 84.

Aufg. Die Gleichung $x^n - k = 0$, auf eine Gleichung von der Form $y^n - 1 = 0$ zu reduciren.

Aufl. Man setze $x = y\sqrt[n]{k}$, und substituire diesen Werth in der Gleichung $x^n - k = 0$, so verwandelt sich dieselbe in $ky^n - k = 0$, oder durch k dividiret, in $y^n - 1 = 0$.

Zus. Hat man daher die Gleichung $y^n - 1 = 0$ auf irgend eine Weise aufgelöst, und bezeichnet man durch $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, 2c. die n Wurzeln derselben, oder die Werthe des y,

so erhält man aus $x = y\sqrt[n]{k}$ die folgenden n Wurzeln der Gleichung $x^n - k = 0$:

$$\sqrt[n]{k},\ \alpha\sqrt[n]{k},\ \beta\sqrt[n]{k},\ \gamma\sqrt[n]{k},\ \delta\sqrt[n]{k},\ \varepsilon\sqrt[n]{k},\ \text{ꝛc.}$$

§ 85.

Aufg. Die Gleichung $x^{pq} - 1 = 0$ auf eine Gleichung von der Form $y^q - 1 = 0$ zu reduciren.

Aufl. Man setze $x^p = y$, so ist $x^{pq} = y^q$. Wird dieser Werth in der gegebenen Gleichung substituirt, so verwandelt sich dieselbe in $y^q - 1 = 0$.

Zus. Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung $x^p - 1 = 0$ durch 1, α, β, γ, δ, ε, ꝛc., so sind die Wurzeln der Gleichung $x^p - y = 0$ (vor. §.)

$$\sqrt[p]{y},\ \alpha\sqrt[p]{y},\ \beta\sqrt[p]{y},\ \gamma\sqrt[p]{y},\ \delta\sqrt[p]{y},\ \varepsilon\sqrt[p]{y},\ \text{ꝛc.}$$

Da man nun für y jede von den Wurzeln der Gleichung $y^q - 1 = 0$ setzen kann, so erhält man durch diese Substitutionen die sämmtlichen pq Wurzeln der Gleichung $x^{pq} - 1 = 0$.

Beysp. Um die Wurzeln der Gleichung $x^{12} - 1 = 0$ zu finden, setze man $p = 4$, $p = 3$. Man hat also die beyden Gleichungen

$$x^4 - y = 0,\quad y^3 - 1 = 0.$$

Nun sind die Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ (§ 83 Beysp. II) $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, also die Wurzeln der Gleichung $x^4 - y = 0$ (vor. §)

$$\sqrt[4]{y},\ -\sqrt[4]{y},\ +\sqrt{-1}\,.\,\sqrt[4]{y},\ -\sqrt{-1}\,.\,\sqrt[4]{y}.$$

Ferner sind die Wurzeln der Gleichung $y^3 - 1 = 0$ (§ 83 Beysp. I)

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Substituirt man nach und nach diese Werthe für y, so erhält man die folgenden zwölf Wurzeln der Gleichung $x^{12} - 1 = 0$:

$$1, \quad -1, \quad \sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}, \; -\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}, \; \sqrt{-1}.\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}, \; -\sqrt{-1}.\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}, \; -\sqrt[4]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}, \; \sqrt{-1}.\sqrt[4]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}, \; -\sqrt{-1}.\sqrt[4]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$$

§ 86.

Aufg. Unter der Voraussetzung, daß n eine Primzahl sey, aus einer von den inmaginären Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, gleichviel welche, alle übrige Wurzeln zu finden.

Aufl. 1) Es bezeichne α eine von den imaginären Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, so daß $\alpha^n - 1 = 0$, oder $\alpha^n = 1$.

2) Da $\alpha^n = 1$, so ist auch $(\alpha^m)^n = (\alpha^n)^m = 1$. Ist also α eine Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$, so muß auch α^m eine Wurzel derselben seyn. Es hat daher die Gleichung $x^n - 1 = 0$ außer α, auch noch die Wurzeln α^2, α^3, α^4, α^5, ꝛc.

3) Da man aber so unendlich viele Wurzeln finden würde, und die Gleichung $x^n - 1 = 0$ nur n Wurzeln haben kann, so läßt sich mit Sicherheit voraussehen, daß es in der Reihe der Potenzen α, α^2, α^3, α^4, α^5, ꝛc. unendlich viele gleiche geben müsse. Dieses ist auch wirklich der Fall: denn man findet $a^{n+1} = \alpha^n . \alpha = \alpha$, $\alpha^{n+2} = \alpha^n . \alpha^2 = \alpha^2$, $\alpha^{n+3} = \alpha^n . \alpha^3 = \alpha^3$, ꝛc.

4) Ueberhaupt wird man, wenn man über die nte Potenz hinaus gehet, keine andere als eine von den folgenden n Wurzeln

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \ldots\ldots\ \alpha^{n-1},\ \alpha^n$$

finden, von denen die letzte $= 1$ ist. Denn es sey α^m irgend eine Potenz von α, und $m > n$. Es heiße ferner q der Quotient, welchen man erhält, wenn m durch n dividirt wird, und r der Rest, folglich $r < n$; so ist $m = nq + r$. Man hat daher $\alpha^m = \alpha^{nq+r} = \alpha^{nq} . \alpha^r = (\alpha^n)^q . \alpha^r = 1^q . \alpha^r = \alpha^r$. Es ist aber α^r, da $r < n$, nothwendig eine von den Potenzen $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4\ \ldots\ldots\ \alpha^{n-1}$.

5) Die bisher gemachten Schlüsse gelten, es mag n eine Primzahl seyn oder nicht. Ist nun insbesondere, wie die Aufgabe voraussetzt, n eine Primzahl, so läßt sich beweisen, daß die Wurzeln $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ldots\ \alpha^n$, sämmtlich von einander verschieden seyn werden. Denn man setze, es wären zwey dieser Potenzen, α^μ, α^ν, einander gleich, und $\nu > \mu$. Dividirt man alsdann die Gleichung $\alpha^\nu = \alpha^\mu$ durch α^μ, so erhält man $\alpha^{\nu-\mu} = 1$; es läßt sich aber, wie folgt, zeigen, daß diese Gleichung nicht Statt haben könne.

6) Da nämlich n eine Primzahl ist, und $\nu - \mu < n$, so sind die Zahlen $\nu - \mu$ und n Primzahlen zu einander. Es lassen sich folglich, wie aus der unbestimmten Analysis bekannt ist, immer zwey ganze positive Zahlen t, u, von solcher Beschaffenheit finden, daß $(\nu - \mu)t = nu + 1$. Sollte daher $\alpha^{\nu-\mu} = 1$ seyn, so müßte auch $\alpha^{(\nu-\mu)t} = 1$ seyn, und mithin auch $a^{nu+1} = 1$, oder $\alpha^{nu} . \alpha = 1$, oder $\alpha = 1$; welches unmöglich ist (1).

7) Da also die Wurzeln $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots\ldots\ \alpha^n$, an der Zahl n, und dabey sämmtlich von einander verschieden sind, so sind selbige die n Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$. Ist daher eine imaginäre Wurzel α gegeben, so hat man auch alle übrigen.

Zus. Bezeichnet man daher die imaginären Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., so lassen sich, wenn n eine Primzahl ist, die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung auf eine oder die andere der nachstehenden Arten angeben:

entweder durch $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^{n-1}, \alpha^n$
oder durch $\beta, \beta^2, \beta^3 \ldots\ldots \beta^{n-1}, \beta^n$
oder durch $\gamma, \gamma^2, \gamma^3 \ldots\ldots \gamma^{n-1}, \gamma^n$

etc.

oder, welches das Nämliche ist, man kann in der Reihe der Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^{n-1}, \alpha^n$ für α jede imaginäre Wurzel $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \ldots\ldots \alpha^{n-1}$, substituiren, und man wird alsdann immer dieselben n Wurzeln erhalten.

Beysp. Für $n=3$ sind die Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$. Setzt man für die Wurzel α die folgende α^2, so erhält man $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6$. Da aber $\alpha^3 = 1$ ist, so wird $\alpha^4 = \alpha$, und $\alpha^6 = \alpha^3$, und man hat also hier $\alpha^2, \alpha, \alpha^3$, wie vorhin. Für $n = 5$ sind die Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$. Setzt man α^2 für α, so hat man dagegen $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \alpha^8, \alpha^{10}$, oder, da $\alpha^5 = 1$ ist, $\alpha^2, \alpha^4, \alpha, \alpha^3, \alpha^5$; also die nämlichen Wurzeln, wie vorhin. Eben so findet man, wenn α^3 für α gesetzt wird, $\alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}, \alpha^{15}$, oder $\alpha^3, \alpha, \alpha^4, \alpha^2, \alpha^5$, und wenn man α^4 für α setzt, $\alpha^4, \alpha^8, \alpha^{12}, \alpha^{16}, \alpha^{20}$, oder $\alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha, \alpha^5$; also immer die nämlichen Wurzeln, nur in einer andern Ordnung.

§ 87.

Lehrsätze.

I. Wenn n durch m theilbar ist, so müssen alle Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$ auch zugleich Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ seyn.

Bew. Da n durch m theilbar ist, so ist $\frac{n}{m} = q$ eine ganze Zahl, und $n = qm$. Die Gleichung $x^n - 1 = 0$ wird also $x^{qm} - 1 = 0$, und wenn man $x^m = y$ setzt, $y^q - 1 = 0$. Nun ist $y^q - 1 = 0$ durch $y - 1$ theilbar; folglich ist auch, wenn für y wieder x^m gesetzt wird, $x^{qm} - 1$ durch $x^m - 1$ theilbar; also sind die Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$ auch Wurzeln der Gleichung $x^{qm} - 1 = 0$ oder $x^n - 1 = 0$. W. Z. E. W.

II. Wenn eine Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$, die Einheit ausgenommen, zugleich eine Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$ von einem niedrigern Grade ist, und zwar von dem niedrigsten, bey welchem dies statt finden kann, so muß n durch m theilbar seyn.

Bew. Es sey α die gemeinschaftliche Wurzel, also $\alpha^n - 1 = 0$, und $\alpha^m - 1 = 0$. Wäre nun n durch m nicht theilbar, so gäbe n durch m dividirt den Quotienten q und den Rest r, so daß $n = qm + r$, und $r < m$. Alsdann wäre $\alpha^n = \alpha^{qm+r} = \alpha^{qm} . \alpha^r$. Aber $\alpha^n = 1$, $\alpha^{qm} = (\alpha^m)^q = 1$; also $1 = \alpha^r$; folglich wäre α auch eine Wurzel der Gleichung $x^r - 1 = 0$, welches der Voraussetzung, daß $x^m - 1 = 0$ die niedrigste Gleichung sey, welche die Wurzel α hat, widerspricht.

III. Wenn m und n zwey Zahlen sind, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, so können die Gleichungen $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$, außer der Einheit, keine Wurzel mit einander gemein haben.

Bew. Wäre es möglich, daß die beyden Gleichungen eine, von der Einheit verschiedene, Wurzel α mit einander gemein hätten, so würde zu gleicher Zeit $\alpha^m = 1$ und $\alpha^n = 1$ seyn. Da m und n Primzahlen zu einander sind, so lassen

sich immer zwey ganze positive Zahlen t, u, von solcher Beschaffenheit finden, daß $mt = nu + 1$. Man hätte alsdann die Gleichung $\alpha^{mt} = \alpha^{nu+1} = \alpha^{nu} . \alpha$. Nach der Hypothese ist aber $\alpha^m = \alpha^n = 1$, mithin $\alpha^{mt} = \alpha^{nu}$: folglich müßte $1 = \alpha$ seyn; welches der Voraussetzung widerspricht.

IV. Wenn die beyden Gleichungen $x^n - 1 = 0$, $x^m - 1 = 0$, außer der Einheit noch eine Wurzel mit einander gemeinschaftlich haben, so müssen die Exponenten m, n, ein gemeinschaftliches Maaß haben.

Bew. Denn hätten sie kein gemeinschaftliches Maaß, so könnten sie auch außer der Einheit keine Wurzel mit einander gemein haben (III).

§ 88.

Aufg. Es sey die Gleichung $x^n - 1 = 0$ gegeben, und n eine zusammengesetzte Zahl: man soll alle diejenigen Wurzeln derselben finden, welche keiner Gleichung eines niedrigern Grades von eben der Form zugehören.

Aufl. 1) Es seyen p, q, r, ꝛc. die einfachen Faktoren des Exponenten n; es sey ferner $\frac{n}{p} = \mu$, $\frac{n}{q} = \mu'$, $\frac{n}{r} = \mu''$, ꝛc. also n durch μ, μ', μ'', ꝛc. theilbar.

2) Macht man daher die Gleichungen

$$x^{\mu} - 1 = 0,\ x^{\mu'} - 1 = 0,\ x^{\mu''} - 1 = 0,\ \text{ꝛc.}$$

so müssen die Gleichungen ihre sämmtlichen Wurzeln mit der Gleichung $x^n - 1 = 0$ gemein haben (§. 87. I.).

3) Ich behaupte nun, daß jede Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$, welche zugleich einer niedrigern Gleichung dieser Form zugehört, nothwendig eine Wurzel von einer der Gleichungen in 2 seyn muß. Denn es sey α eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $x^n - 1 = 0$, $x^k - 1 = 0$,

und die letzter die niedrigste von dieser Form, welcher jene Wurzel zugehören kann, so muß k ein Theiler von n seyn (§ 87. II), also auch gewiß ein Theiler von einer der Zahlen μ, μ', μ'', ꝛc. Es müssen folglich die sämmtlichen Wurzeln von $x^k - 1 = 0$ in einer der Gleichungen in 2 enthalten seyn; also auch die Wurzel α.

4) Dividirt man die Gleichung $x^n - 1 = 0$ nach und nach durch $x^\mu - 1$, $x^{\mu'} - 1$, $x^{\mu''} - 1$, ꝛc., so erhält man

$$x^{n-\mu} + x^{n-2\mu} + x^{n-3\mu} + \ldots + x^{2\mu} + x^\mu + 1 = 0$$
$$x^{n-\mu'} + x^{n-2\mu'} \quad x^{n-3\mu'} + \ldots + x^{2\mu'} + x^{\mu'} + 1 = 0$$
$$x^{n-\mu''} + x^{n-2\mu''} + x^{n-3\mu''} + \ldots + x^{2\mu''} + x^{\mu''} + 1 = 0$$

ꝛc.

Die erste dieser Gleichungen enthält alle diejenigen Wurzeln von $x^n - 1 = 0$, die nicht in $x^\mu - 1 = 0$ enthalten sind; die zweyte alle diejenigen Wurzeln von $x^n - 1 = 0$, die nicht in $x^{\mu'} - 1 = 0$ enthalten sind; ꝛc.

5) Eine Wurzel β, welche allen diesen Gleichungen gemeinschaftlich ist, kann also weder in $x^\mu - 1 = 0$, noch in $x^{\mu'} - 1 = 0$, noch in $x^{\mu''} - 1 = 0$, ꝛc. vorkommen, und kann daher auch keine, einer niedrigern zweytheiligen Gleichung als $x^n - 1 = 0$ zugehörige Wurzel seyn (3).

6) Sucht man daher den größten gemeinschaftlichen Theiler der Gleichungen in 4, so muß derselbe nur solche Wurzen enthalten, welche der Gleichung $x^n - 1 = 0$ eigenthümlich sind, und keiner eines niedrigern Grades dieser Form zugehören. Es ist aber auch klar, daß keine solche Wurzel in dem größten gemeinschaftlichen Theiler fehlen kann, weil er sonst nicht der größte seyn könnte.

Beysp. I. Es sey $x^4 - 1 = 0$ die gegebene Gleichung, also $n = 4$. Da diese Zahl nur einen einzigen einfachen Fak-

tor hat, nämlich 2, so ist $p=2$; also $\mu=\frac{n}{p}=2$. Dividirt man daher die Gleichung $x^4-1=0$ durch x^2-1, so erhält man die Gleichung

$$x^2+1=0$$

deren Wurzeln $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ von solcher Beschaffenheit sind, daß sie erst alsdann, wenn sie zur vierten Potenz erhoben werden, $+1$ geben.

Beysp. II. Es sey $x^{12}-1=0$ die gegebene Gleichung, also $n=12$. Diese Zahl hat zwey einfache Faktoren, nämlich 2 und 3. Man hat also $p=2$, $q=3$, und daher $\mu=\frac{n}{p}=6$, $\mu'=\frac{n}{q}=4$. Dividirt man nun $x^{12}-1=0$ durch x^6-1 und x^4-1, so erhält man die beyden Gleichungen

$$x^6+1=0$$
$$x^8+x^4+1=0.$$

Ihr größter gemeinschaftlicher Theiler ist

$$x^4-x^2+1=0.$$

Hieraus findet man

$$x=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$$

und diese vier Wurzeln sind der Gleichung $x^{12}-1=0$ eigenthümlich, weil sie nicht eher $+1$ geben, bis sie zur zwölften Potenz erhoben worden.

Um nun die übrigen Wurzeln zu finden, braucht man nur die Gleichungen $x^6-1=0$, $x^4-1=0$ aufzulösen, und die gemeinschaftlichen Wurzeln nur Einmal zu nehmen. Die Wurzeln der Gleichungen $x^4-1=0$, $x^6-1=0$, finden sich in § 83. Auf diese Weise erhält man die folgenden acht Wurzeln.

$$\pm 1, \pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}},$$

welche mit den vorigen vier zusammen die zwölf Wurzeln von $x^{12}-1=0$ geben. Diese Ausdrücke derselben sind, wie man siehet, um vieles einfacher als jene in § 85.

Anmerk. Eine Wurzel, welche der Gleichung $x^n-1=0$ eigenthümlich ist, d. h. welche keiner Gleichung eines niedrigern Grades von dieser Form zugehört, soll eine primitive Wurzel dieser Gleichung heißen.

§ 89.

Aufg. Es sey n eine zusammengesetzte Zahl, und α eine gegebene primitive Wurzel: man soll die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung finden.

Aufl. 1) In § 86 wurde gezeigt, daß für jedes n, was für eine imaginäre Wurzel auch α seyn mag, immer die Potenzen $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots. \alpha^n$, Wurzeln der Gleichung $x^n-1=0$ seyn werden.

2) Ich behaupte nun, daß wenn, wie hier vorausgesetzt worden, α eine primitive Wurzel ist, es in der Reihe der Größen $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots. \alpha^n$, keine zwey geben könne, die einander gleich wären. Denn wäre $\alpha^\mu=\alpha^\nu$, so wäre $\alpha^{\mu-\nu}=1$, folglich α eine Wurzel der Gleichung $x^{\mu-\nu}-1=0$; mithin die Wurzel einer Gleichung von der Form $x^n-1=0$, von einem niedrigern Grade als n, und also keine primitive Wurzel, wider die Voraussetzung.

3) Da also die Größen $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots. \alpha^n$ sämmtlich Wurzeln der Gleichung $x^n-1=0$, und alle von einander verschieden sind, so sind sie die gesuchten n Wurzeln dieser Gleichung.

§ 90.

Aufg. Es sey n eine zusammengesetzte Zahl, und α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$, mithin α, α^2, α^3, α^4, ... α^n die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung (§ 89): man soll ein Merkmal angeben, wodurch man im Stande sey, die primitiven Wurzeln darunter von den andern zu unterscheiden.

Aufl. 1) Wenn zwey ganze Zahlen m, n, ein gemeinschaftliches Maaß haben, so läßt sich immer eine ganze Zahl t angeben, die kleiner als n und von solcher Beschaffenheit ist, daß mt durch n theilbar sey; sind hingegen die Zahlen m, n, Primzahlen zu einander, so kann t nicht kleiner als n seyn, wenn mt durch n theilbar seyn soll.

2) Es sey nun α^m irgend eine von den Größen α, α^2, α^3, ... α^n. Soll diese die Wurzel einer Gleichung $x^t - 1 = 0$ seyn, so muß man haben $\alpha^{mt} - 1 = 0$, oder $\alpha^{mt} = 1$; es muß also mt durch n theilbar seyn.

3) Aus dieser Bedingung und aus 1 ergiebt sich also, daß, wenn die Zahlen m, n, ein gemeinschaftliches Maaß haben, es immer eine Gleichung $x^t - 1 = 0$ von einem niedrigern Grade als dem nten gebe, von welcher α^m eine Wurzel ist; daß es aber keine solche gebe, wenn m, n, Primzahlen zu einander sind.

4) Hieraus folgt aber, daß von den Potenzen α, α^2, α^3, α^4, ... α^n, alle diejenigen ausschließlich primitive Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ sind, deren Exponenten mit n kein gemeinschaftliches Maaß haben; und dies ist also das Merkmal, wodurch man die primitiven Wurzeln von den andern unterscheiden kann.

Beysp. Unter den sämmtlichen Wurzeln α, α^2, α^3, α^4,

α^5, α^6, α^7, α^8, α^9, α^{10}, α^{11}, α^{12}, der Gleichung $x^{12} - 1 = 0$ giebt es nicht mehr als die vier α, α^5, α^7, α^{11}, deren Exponenten mit 12 kein gemeinschaftliches Maaß haben, und daher primitive Wurzeln jener Gleichung sind; und diese Wurzeln können keine andere seyn, als die vier, welche im zweyten Beyspiele § 88 gefunden worden; nämlich:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}, \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}, \quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$

Um sich hiervon zu überzeugen, nehme man eine derselben, z. B. $\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$ für α an; so wird man durch die wirkliche Erhebung dieser Wurzel zur fünften, siebenten und eilften Potenz finden:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$
$$\alpha^5 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$
$$\alpha^7 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$
$$\alpha^{11} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$

und diese sind die nämlichen als die vorigen. Dasselbe Resultat würde man erhalten haben, wenn man jede andere von den vier genannten Wurzeln für α gesetzt hätte. Daß dies geschehen müsse, läßt sich übrigens auch ohne die wirkliche Ausführung der Rechnung einsehen; denn setzt man in α, α^5, α^7, α^{11}, nach und nach α^5, α^7, α^{11}, anstatt α, und läßt aus den Exponenten die Vielfachen von 12 weg, so erhält man

α^5, α^{25}, α^{35}, α^{55}, oder α^5, α, α^{11}, α^7
α^7, α^{35}, α^{49}, α^{77}, oder α^7, α^{11}, α, α^5
α^{11}, α^{55}, α^{77}, α^{121}, oder α^{11}, α^7, α^5, α,

also immer dieselben Wurzeln, nur in einer andern Ordnung.

§ 91.

Wenn man die Gleichung $x^n - 1 = 0$ gegen die allgemeine Gleichung $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots$

$\mp Sx \pm T = 0$ hält, so findet man $A=0$, $B=0$, $C=0$, ... $S=0$, $T=\mp 1$. Bezeichnet man also die Wurzeln jener Gleichung durch α, β, γ, δ, rc, so hat man

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{rc.} = 0$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \text{rc.} + \beta\gamma + \beta\delta + \text{rc. rc.} = 0$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \text{rc.} + \beta\gamma\delta + \text{rc. rc.} = 0$$

und so fort bis zum Produkte aller Wurzeln, welches $=-1$, oder $=+1$ wird, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Da in den beyden ersten Capiteln die Buchstaben α, β, γ, δ, rc. zur Bezeichnung der Wurzelexponenten gebraucht wurden, so will ich, um Irrungen zu vermeiden, ein für alle Mal erinnern, daß diese Buchstaben, wenn sie sich in dem Summenzeichen [ ] befinden, immer wie bisher Wurzelexponenten bezeichnen sollen, in jedem andern Falle aber die Wurzeln selbst. Um ferner anzudeuten, daß sich ein Summenausdruck ausschließlich auf die Wurzeln einer Gleichung von der Form $x^n - 1 = 0$ beziehe, werde ich dem Summenzeichen zur Linken einen Strich beyfügen, so daß z. B. $'[\alpha\beta\gamma\delta \ldots \varkappa]$ einen Summenausdruck für die Wurzelexponenten α, β, γ, δ .... $\varkappa$, in Beziehung auf die Gleichung $x^n - 1 = 0$ bezeichnet.

§ 92.

Aufg. **Die Potenzensummen von den Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ zu finden.**

Aufl. 1) Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0,$$

so findet man $A=0$, $B=0$, $C=0$, rc. $P=0$, $Q=-1$. Man erhält also vermittelst der Gleichungen in 7. § 8,

$$'[1]=0,\ '[2]=0,\ '[3]=0, \ldots '[n-1]=0$$

hinge-

hingegen ${}'[n] = n$. Eben so findet man

$${}'[n+1]=0,\ {}'[n+2]=0,\ {}'[n+3]=0,\ \ldots.\ {}'[2n-1]=0$$

hingegen ${}'[\overline{2n}] = n$. Ueberhaupt werden alle diejenigen Potenzensummen, deren Wurzelexponenten durch n theilbar sind, $= n$, alle übrige hingegen $= 0$.

2) Setzt man $x=\frac{1}{y}$, so verwandelt sich die Gleichung $x^n - 1 = 0$ in $\frac{1}{y^n} - 1 = 0$, oder $y^n - 1 = 0$, deren Wurzeln also die reciproken von den Wurzeln jener Gleichung sind (§ 10). Da aber die Gleichungen $x^n - 1 = 0$, $y^n - 1 = 0$, einander ähnlich sind, so hat man auch

$${}'[-1]=0,\ {}'[-3]=0,\ \ldots..\ {}'[-n+1]=0,\ {}'[-n]=n$$

und überhaupt alle diejenigen negativen Potenzensummen, deren Exponenten durch n theilbar sind, $= n$, alle übrige hingegen $= 0$.

§ 93.

Aufg. Den Werth von ${}'[\alpha\beta]$ zu finden.

Aufl. Da im Allgemeinen für jede Gleichung $[\alpha\beta] = [\alpha]\,[\beta] - [\alpha + \beta]$, und wenn $\alpha = \beta$, $2[\alpha^2] = [\alpha]^2 - [\overline{2\alpha}]$, so ist auch für die Gleichung $x^n - 1 = 0$ insbesondere

$${}'[\alpha\beta] = {}'[\alpha]\,{}'[\beta] - {}'[\alpha + \beta]$$
$${}'[\alpha^2] = \tfrac{1}{2}{}'[\alpha]^2 - \tfrac{1}{2}\,{}'[\overline{2\alpha}]$$

Um nun hieraus den Zahlenwerth von ${}'[\alpha\beta]$ zu bestimmen, müssen drey Fälle unterschieden werden.

1) Wenn $\alpha + \beta$ durch n theilbar, nicht aber die Wurzelexponenten α, β, einzeln genommen. In diesem Falle ist nach dem vor. § ${}'[\alpha]={}'[\beta]=0$, ${}'[\alpha+\beta] = n$; also

$${}'[\alpha\beta]=-n,$$

und wenn $\beta = \alpha$ wird

$$`[\alpha^2] = -\frac{n}{2}.$$

2) Wenn $\alpha + \beta$ durch n theilbar, zugleich aber auch die Wurzelexponenten α, β, einzeln genommen. In diesem Falle ist $`[\alpha] = `[\beta] = n$ und $`[\alpha + \beta] = n$; also

$$`[\alpha\beta] = n^2 - n$$

und wenn $\alpha = \beta$ ist,

$$`[\alpha^2] = \frac{n^2 - n}{2}$$

3) Wenn $\alpha + \beta$ durch n nicht theilbar ist. In diesem Falle ist $`[\alpha + \beta] = 0$; aber auch das Produkt $`[\alpha]\,`[\beta] = 0$, weil alsdann nicht α und β zugleich durch n theilbar seyn können; folglich immer

$$`[\alpha\beta] = 0.$$

§ 94.

Aufg. Es soll der Werth von $`[\alpha\beta\gamma]$ gefunden werden.

Aufl. Es ist

$$`[\alpha\beta\gamma] = `[\alpha]\,`[\beta]\,`[\gamma] - `[\alpha]\,`[\beta + \gamma] - `[\beta]\,`[\alpha + \gamma]$$
$$- `[\gamma]\,`[\alpha + \beta] + 1.2\,`[\alpha + \beta + \gamma].$$

Es kommen nun hierbey folgende Fälle in Betrachtung:

1) Wenn $\alpha + \beta + \gamma$ durch n nicht theilbar ist, so ist das letzte Glied der hier gegebenen Entwickelung von $`[\alpha\beta\gamma] = 0$; auch sind alsdann alle übrige Glieder dieser Entwickelung $= 0$, weil es in jedem derselben wenigstens einen Summenausdruck mit einem durch n untheilbaren Wurzelexponenten geben muß: folglich ist für diesen Fall $`[\alpha\beta\gamma] = 0$.

2) Wenn α, β, γ, jedes insbesondere durch n theilbar ist, so wird jeder von den Summenausdrücken $`[\alpha]$, $`[\beta]$, $`[\gamma]$, $`[\alpha + \beta]$, $`[\alpha + \gamma]$, $`[\beta + \gamma]$, $= n$, und folglich

$$`[\alpha\beta\gamma] = n^3 - 3n^2 + 2n$$

3) In jedem andern Falle ist immer

$$'[\alpha\beta\gamma] = -n^2 + 2n$$

§ 95.

Aufg. Den Werth des allgemeinen Summenausdrucks $[\alpha^a\beta^b\gamma^c \ldots \kappa^f]$ zu finden.

Aufl. 1) Das letzte Glied in der Entwickelung dieses Summenausdrucks ist nach dem zweiten Capitel

$$\mp \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \ldots \nu-1}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times \ldots \times 1.2\ldots f} '[a\alpha + b\beta + \ldots + f\kappa]$$

wenn $a + b + c + \ldots + f = \nu$ gesetzt wird; das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades ν.

2) Ist nun n kein Theiler von $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + f\kappa$, so wird dieses letzte Glied $= 0$; zugleich verschwinden aber auch alle übrige Glieder, weil sich in jedem derselben wenigstens ein Summenausdruck befinden muß, dessen Wurzelexponent nicht durch n theilbar ist, indem sonst die Summe aller Wurzelexponenten, der Voraussetzung entgegen, durch n theilbar seyn müßte.

3) Ist aber $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + f\kappa$ durch n theilbar, so ist dieses letzte Glied allein

$$= \mp \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \ldots \nu-1}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times \ldots \times 1.2\ldots f} . n$$

3) Um die Werthe der übrigen Glieder zu erhalten, kann man wie folgt verfahren. Man zerfälle die Complexion $\alpha^a\beta^b\gamma^c \ldots \kappa^f$ auf alle mögliche Arten in zwey, in drey, u. s. w. Complexionen, deren Ziffernsummen durch n theilbar sind, und gebe einer jeden solchen Zerfällung den Coefficienten K in 7. § 30, wenn alle einzelne Complexionen derselben verschieden sind; hingegen den Coefficienten K in 10. § 30, wenn sich darunter gleiche befinden, und bestimme das Vor-

zeichen so, wie in 13 ebendas. gelehrt worden. Man nehme hierauf, ohne weiter Rücksicht auf die Complexionen selbst, das Aggregat von allen den Coefficienten, welche aus den Zerfällungen in zwey Complexionen entstanden sind; ferner das Aggregat von allen den Coefficienten, welche aus den Zerfällungen in drey Complexionen entstanden sind, u. s. w. Bezeichnet man alsdann diese verschiedenen Aggregate nach der Ordnung durch A, B, C, D, ꝛc., so ist der Werth aller Glieder außer dem letzten

$$= \mathfrak{A}n^2 + \mathfrak{B}n^3 + \mathfrak{C}n^4 + \mathfrak{D}n^5 + \text{ꝛc.}$$

5) Aus 3 und 4 erhält man demnach den folgenden Werth des Summenausdruckes $[\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots \varkappa^k]$:

$$\mp \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots\ldots \nu-1}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times \ldots\ldots \times 1.2\ldots k}.n$$
$$+ \mathfrak{A}n^2 + \mathfrak{B}n^3 + \mathfrak{C}n^4 + \mathfrak{D}n^5 + \text{ꝛc.}$$

Beysp. Gesetzt man wollte den Werth von $'[1^2 2^3 5^2]$ für $n=6$ finden, so verfahre man nach dem folgenden Schema:

Complexion $1^2 2^3 5^2$

Zerfällungen.	Coefficienten.
$15,\ 12^3 5$	$-\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = -4$
$2^3,\ 1^2 5^2$	$-\frac{1.2 \times 1.2.3}{1.2.3 \times 1.2 \times 1.2} = -\frac{1}{2}$
$1^2 2^2,\ 25^2$	$-\frac{1.2.3 \times 1.2}{1.2 \times 1.2 \times 1.2} = -\frac{3}{2}$
$15,\ 15,\ 2^3$	$+\frac{1.2}{1.2 \times 1.2.3} = +\frac{1}{6}$

Man hat daher $\mathfrak{A} = -4 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -6$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{6}$, mithin da auch $a=2$, $b=3$, $c=2$, also $\nu=7$,

$$'[1^2 2^3 5^2] = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2 \times 1.2.3 \times 1.2}.6 - 6.6^2 + \frac{1}{6}.6^3 = 0.$$

§. 96.

Die symmetrischen Funktionen von den Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ haben vorzüglich bey dem Wegschaffen der Wurzelgrößen aus den Gleichungen ihren Nutzen. Aus einer Gleichung die Wurzelgrößen wegschaffen, oder sie rational machen, heißt nämlich nichts anders, als aus dieser Gleichung eine andere herleiten, welche nur Rationalgrößen enthält, und so beschaffen ist, daß die Wurzeln jener Gleichung zugleich Wurzeln von dieser sind. Um zu sehen, worauf es hierbey ankommt, will ich annehmen, man hätte die Gleichung vom ersten Grade $x - A = 0$, in welcher A irgend einen irrationalen Ausdruck bezeichnet, und man wollte eine von Wurzelgrößen befreyte Gleichung für x finden. Da jede Wurzelgröße, welche in dem Ausdruck A vorkommt, mehrere Werthe erhalten kann, so ist der Werth des x vieldeutig, und so lange nichts Näheres darüber bestimmt worden, zweifelhaft. Eine von Irrationalgrößen befreyte Gleichung, welche den Ausdruck A zur Wurzel haben soll, kann, dieser Unbestimmtheit wegen, nicht gerade den oder jenen Werth geben, welchen man sich dabey denkt, sondern muß nothwendig alle jene verschiedene Werthe, welche derselbe erhalten kann, zu gleicher Zeit geben, weil sonst kein zureichender Grund vorhanden wäre, warum sie gerade diesen, und nicht auch jeden andern Werth geben solle. Da nun die Werthe des x Funktionen von den Coefficienten der Gleichung sind, die Coefficienten aber, der Forderung gemäß, rational seyn sollen, so kann die Verschiedenheit dieser Werthe nicht von den Coefficienten herrühren, sondern muß ihren Grund in dem Grade der Gleichung haben. Der Grad der Gleichung muß also der Anzahl der verschiedenen Werthe, welche der Ausdruck A erhalten kann, gleich seyn. Wäre aber die Bedingung von der Rationalität der Coefficienten weggelassen, so ließen sich allerdings Gleichungen von niedri-

gern Graden finden, welche jenen Ausdruck zu Wurzeln haben, weil alsdann die Coefficienten selbst unbestimmt sind.

Es sey z. B. $x = \sqrt{k}$. Die Wurzelgröße $\sqrt{k}$ hat zwey Werthe, nämlich $+\sqrt{k}$ und $-\sqrt{k}$. Die gesuchte Gleichunng muß daher diese beyden Werthe zu Wurzeln haben, und sie ist folglich $(x+\sqrt{k})\ (x-\sqrt{k}) = 0$, oder, wenn man wirklich multiplicirt $x^2 - k = 0$; eine rationale Gleichung, die man auch erhalten haben würde, wenn man beyde Theile der Gleichung $x = \sqrt{k}$ zum Quadrate erhoben hätte.

Es sey ferner $x = \sqrt[3]{k}$. Bezeichnet man die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ durch α, β, γ; so kann die Wurzelgröße $\sqrt[3]{k}$ die drey Werthe $\alpha\sqrt[3]{k}$, $\beta\sqrt[3]{k}$, $\gamma\sqrt[3]{k}$, bekommen, und diese müssen daher die Wurzeln der gesuchten Gleichung seyn. Sie ist folglich

$$(x - \alpha\sqrt[3]{k})\ (x - \beta\sqrt[3]{k})\ (x - \gamma\sqrt[3]{k}) = 0.$$

Multiplicirt man wirklich, so erhält man

$$x^3 - {}'[1]\sqrt[3]{k} \,.\, x^2 + {}'[1^2]\sqrt[3]{k^2} \,.\, x - {}'[1^3]\ k = 0;$$

oder, da nach dem vor. §, $'[1] = 0$, $'[1^2] = 0$, $'[1^3] = \frac{1 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 3 = 1$,

$$x^3 - k = 0;$$

eine rationale Gleichung, welche man auch gefunden haben würde, wenn man beyde Theile der Gleichung $x = \sqrt[3]{k}$ zum Cubus erhoben hätte.

Ich will nun noch $x = \sqrt[4]{k}$ setzen. Da $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ sind, so sind $+\sqrt[4]{k}$, $-\sqrt[4]{k}$, $+\sqrt{-1} \,.\, \sqrt[4]{k}$, $-\sqrt{-1} \,.\, \sqrt[4]{k}$, die vier Werthe von $\sqrt[4]{k}$, und die gesuchte Gleichung ist daher

$$(x-\sqrt[4]{k})(x+\sqrt[4]{k})(x-\sqrt{-1}.\sqrt[4]{k})(x+\sqrt{-1}.\sqrt[4]{k})=0$$

oder, wenn man die Multiplikation wirklich verrichtet,

$$x^4 - k = 0,$$

wie erfordert wird.

Hätte man für $\sqrt[4]{k}$ bloß die beyden Werthe $+\sqrt[4]{k}$, $-\sqrt[4]{k}$ genommen, und daraus die Gleichung $(x-\sqrt[4]{k})(x+\sqrt[4]{k}=0$ formirt, so hätte sich schon voraussehen lassen, daß man keine rationale Gleichung mehr finden werde. Und dieses ist auch wirklich der Fall; man erhält nämlich $x^2 - \sqrt{k} = 0$. Jeder von den beyden Werthen des x enthält die Wurzelgröße $\sqrt{k}$, und da diese einen doppelten Werth hat, so erhält man die vier Werthe des x.

Man siehet hieraus wenigstens, wie man bey den Gleichungen vom ersten Grade zu verfahren habe, um sie rational zu machen. Ist nämlich $x=A$ eine solche Gleichung, und bezeichnet man durch A', A'', A''', etc. die verschiedenen Werthe, welche der irrationale Ausdruck A wegen der Vieldeutigkeit der darin befindlichen Wurzelgrößen erhalten kann, so ist immer

$$(x-A')(x-A'')(x-A''')\ldots\ldots=0$$

die gesuchte, von Wurzelgrößen befreyte Gleichung.

Die folgenden Aufgaben werden hierüber mehr Licht verbreiten.

§ 97.

Aufg. Die Gleichung $x = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ rational zu machen.

Aufl. Der irrationale Ausdruck $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ kann vier verschiedene Werthe erhalten, je nachdem man den Quadrat-

wurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, das Zeichen + oder − giebt, und diese Werthe sind

$$+\sqrt{p}+\sqrt{q},\ -\sqrt{p}-\sqrt{q},\ +\sqrt{p}-\sqrt{q},\ -\sqrt{p}+\sqrt{q}.$$

Die von Wurzelgrößen befreyte Gleichung ist demnach

$$(x-\sqrt{p}-\sqrt{q})(x+\sqrt{p}+\sqrt{q})$$
$$(x-\sqrt{p}+\sqrt{q})(x+\sqrt{p}-\sqrt{q})=0,$$

oder, wenn man den ersten und zweyten Faktor, desgleichen den dritten und vierten mit einander multiplicirt

$$(x^2-p-q-2\sqrt{pq})(x^2-p-q+2\sqrt{pq})=0,$$

oder, endlich bey wiederholter Multiplikation

$$x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2=0$$

§ 98.

Aufg. Die Gleichung $x=a\sqrt{p}+\frac{b}{\sqrt{p}}$ rational zu machen.

Aufl. Da es hier nur eine, und zwar quadratische Wurzelgröße giebt, nämlich $\sqrt{p}$, so kann x nicht mehr als zwey Werthe erhalten, und diese sind

$$a\sqrt{p}+\frac{b}{\sqrt{p}},\quad -a\sqrt{p}-\frac{b}{\sqrt{p}}.$$

Die rationale Gleichung ist demnach

$$\left(x-a\sqrt{p}-\frac{b}{\sqrt{p}}\right)\left(x+a\sqrt{p}+\frac{b}{\sqrt{p}}\right)=0$$

oder $$x^2-a^2p-2ab-\frac{b^2}{p}=0$$

oder auch $px^2-(ap+b)^2=0$

§ 99.

Aufg. Die Gleichung $x=a\sqrt[3]{p}+b\sqrt[3]{p^2}$ rational zu machen.

Aufl. 1) Die kubische Wurzelgröße $\sqrt[3]{p}$ kann drey Werthe erhalten, nämlich:

$$\alpha\sqrt[3]{p},\ \beta\sqrt[3]{p},\ \gamma\sqrt[3]{p},$$

wenn α, β, γ, die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ bezeichnen, die Einheit mit eingeschlossen. Diesen dreyen Werthen von $\sqrt[3]{p}$ entsprechen die folgenden drey Werthe ihres Quadrates $\sqrt[3]{p^2}$;

$$\alpha^2\sqrt[3]{p^2},\ \beta^2\sqrt[3]{p^2},\ \gamma^2\sqrt[3]{p^2}.$$

Es kann also x nicht mehr als diese drey Werthe erhalten:

$$\alpha a\sqrt[3]{p} + \alpha^2 b\sqrt[3]{p^2},\ \beta a\sqrt[3]{p} + \beta^2 b\sqrt[3]{p^2},\ \gamma a\sqrt[3]{p} + \gamma^2 b\sqrt[3]{p^2}.$$

Die rationale Gleichung wird daher vom dritten Grade seyn.

2) Sie werde durch

$$x^3 - Px^2 + Qx - R = 0$$

vorgestellt; so ist

$$P = (\alpha a\sqrt[3]{p} + \alpha^2 b\sqrt[3]{p^2}) + (\beta a\sqrt[3]{p} + \beta^2 b\sqrt[3]{p^2}) + (\gamma a\sqrt[3]{p} + \gamma^2 b\sqrt[3]{p^2})$$

$$= {}'[1]\, a\sqrt[3]{p} + {}'[2]\, b\sqrt[3]{p^2}$$

$$Q = (\alpha a\sqrt[3]{p} + \alpha^2 b\sqrt[3]{p^2})(\beta a\sqrt[3]{p} + \beta^2 b\sqrt[3]{p^2}) + (\alpha a\sqrt[3]{p} + \alpha^2 b\sqrt[3]{p^2})(\gamma a\sqrt[3]{p} + \gamma^2 b\sqrt[3]{p^2}) + (\beta a\sqrt[3]{p} + \beta^2 b\sqrt[3]{p^2})(\gamma a\sqrt[3]{p} + \gamma^2 b\sqrt[3]{p^2})$$

$$= {}'[1^2]\, a^2\sqrt[3]{p^2} + {}'[12]\, abp + {}'[2^2]\, .\, b^2 p\sqrt[3]{p}$$

$$R = (\alpha a\sqrt[3]{p} + \alpha^2 b\sqrt[3]{p^2})(\beta a\sqrt[3]{p} + \beta^2 b\sqrt[3]{p^2})(\gamma a\sqrt[3]{p} + \gamma^2 \sqrt[3]{p^2})$$

$$= {}'[1^3]\, a^3 p + {}'[1^2 2]\, a^2 bp\sqrt[3]{p} + {}'[12^2]\, ab^2 p\sqrt[3]{p^2} + {}'[2^3]\, b^3 p^2$$

3) Hier kommen nun die Summenausdrücke '[1], '[2], '[1²], '[2²], '[1²2], '[12²], '[12], '[1³], [2³] vor, von welchen die ersten sechs nach 2. § 94 verschwinden. Ferner ist nach dem nämlichen §, da hier $n = 3$ ist, '[12] $= -3$, '[1³] $= 1$, '[2³] $= 1$. Durch die Substitution dieser Werthe in den Ausdrücken für P, Q, R, erhält man $P = 0$, $Q = -3abp$, $R = a^3p + b^3p^2$, und hieraus die gesuchte rationale Gleichung

$$x^3 - 3abpx - a^3p - b^3p^2 = 0.$$

Anmerk. Man hätte die Rechnung zur Bestimmung der Werthe von P, Q, R, um ein Bedeutendes abkürzen können, wenn man sogleich alle diejenigen Glieder, worin p unter dem Wurzelzeichen vorkommt, außer Acht gelassen hätte, weil sich voraussehen ließ, daß sie aus den Resultaten verschwinden werden, indem die gesuchte Gleichung keine Irrationalgrößen enthalten darf.

§ 100.

Die Aufgabe des vor. §'s führt unmittelbar zur Auflösung der Gleichungen des dritten Grades. Denn da die vorausgesetzten Wurzeln $\alpha a\sqrt[3]{p} + \alpha^2 b\sqrt[3]{p^2}$, $\beta a\sqrt[3]{p} + \beta^2 b\sqrt[3]{p^2}$, $\gamma a\sqrt[3]{p} + \gamma^2 b\sqrt[3]{p^2}$ auf die Gleichung $x^3 - 3abpx - a^3p - b^3p^2 = 0$ führten, so läßt sich umgekehrt schließen, daß eine jede Gleichung von dieser Form jene drey Wurzeln haben müsse. Setzt man $p = 1$, so verwandelt sich dieselbe in

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$$

und die drey Wurzeln dieser Gleichung sind daher

$$\alpha a + \alpha^2 b,\ \beta a + \beta^2 b,\ \gamma a + \gamma^2 b.$$

Da eine der drey Wurzeln α, β, γ der Einheit gleich seyn muß, so kann man $\gamma = 1$ setzen; ferner ist $\alpha^2 = \beta$, $\beta^2 = \alpha$;

die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$ nehmen daher die folgende Form an:

$$\alpha a + \beta b,\quad \beta a + \alpha b,\quad a + b.$$

Ganz das nämliche Resultat erhält man auch durch die Cardanische Formel, bey welcher man, wie bekannt, die gegebene Gleichung unter die Form $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$ zu bringen sucht.

§ 101.

Die Aufgabe § 99 läßt sich auch noch auf eine andere Art auflösen. Setzt man nämlich $\sqrt[3]{p} = y$, so ist $\sqrt[3]{p^2} = y^2$, also $x = ay + by^2$: der Werth des y bestimmt den Werth des x. Nun kann aber y drey Werthe bekommen, nämlich $\alpha\sqrt[3]{p}$, $\beta\sqrt[3]{p}$, $\gamma\sqrt[3]{p}$, die sämmtlich durch die Gleichung $y^3 - p = 0$ gegeben sind; es müssen also die Werthe des x das Resultat der Elimination des y aus den beyden Gleichungen

$$\text{I. } y^3 - p = 0$$
$$\text{II. } x - ay - by^2 = 0$$

seyn. Um diese Elimination wirklich zu verrichten, gebe man nach § 75 der Gleichung II die Form $1 + (1)y + (2)y^2 = 0$, so daß $(1) = -\frac{a}{x}$, $(2) = -\frac{b}{x}$, und man erhält alsdann die folgende Gleichung

$$0 = 1 + (1)[1] + (2)[2] + (12)[12] + (2^2)[2^2] + (1^2)[1^2] + (1^3)[1^3] + (1^2 2)[1^2 2] + (12^2)[12^2] + (2^3)[2^3]$$

Die Summenausdrücke kann man aus den angehängten Tafeln nehmen, wofern man $A = 0$, $B = 0$, $C = p$ setzt. Substituirt man hierauf wieder für (1), (2), ihre Werthe $-\frac{a}{x}$,

$+ \frac{b}{x}$, so erhält man die Gleichung $x^3 - 3abpx - b^3p - a^3p^2 = o$, wie in § 99.

§ 102.

Aufg. Die Glieder $x = a\sqrt[3]{p} + b\sqrt[3]{q}$ rational zu machen.

Aufl. 1) Die kubische Wurzelgröße $\sqrt[3]{p}$ kann drey Werthe erhalten, nämlich $\alpha\sqrt[3]{p}$, $\beta\sqrt[3]{p}$, $\gamma\sqrt[3]{p}$. Eben so kann $\sqrt[3]{q}$ die Werthe $\alpha\sqrt[3]{q}$, $\beta\sqrt[3]{q}$, $\gamma\sqrt[3]{q}$ erhalten. Jeder der ersteren läßt sich mit jedem der anderen verbinden, und dies giebt neun Werthe für x, nämlich:

$$\alpha a\sqrt[3]{p} + \alpha b\sqrt[3]{q},\quad \beta a\sqrt[3]{p} + \alpha b\sqrt[3]{q},\quad \gamma a\sqrt[3]{p} + \alpha b\sqrt[3]{q}$$
$$\alpha a\sqrt[3]{p} + \beta b\sqrt[3]{q},\quad \beta a\sqrt[3]{p} + \beta b\sqrt[3]{q},\quad \gamma a\sqrt[3]{p} + \beta b\sqrt[3]{q}$$
$$\alpha a\sqrt[3]{p} + \gamma b\sqrt[3]{q},\quad \beta a\sqrt[3]{p} + \gamma b\sqrt[3]{q},\quad \gamma a\sqrt[3]{p} + \gamma b\sqrt[3]{q}$$

Hieraus könnte man nun die von Wurzelgrößen befreyte Gleichung auf die gewöhnliche Weise finden. Man kann aber auch diesen Zweck, wie im vor. §, durch die Elimination erreichen.

2) Man setze zu dem Ende $a\sqrt[3]{p} = y$, $b\sqrt[3]{q} = z$; so ist $x = y + z$. Da nun y die Werthe $\alpha a\sqrt[3]{p}$, $\beta a\sqrt[3]{p}$, $\gamma a\sqrt[3]{p}$, und z die Werthe $\alpha b\sqrt[3]{q}$, $\beta b\sqrt[3]{q}$, $\gamma b\sqrt[3]{q}$ erhalten kann, die sämmtlich in den beyden Gleichungen $y^3 - a^3p = o$, $z^3 - b^3q = o$ begriffen sind, so kommt alles bloß darauf an, aus den drey Gleichungen

$$\text{I.}\quad x = y + z$$
$$\text{II.}\quad y^3 - a^3p = o$$
$$\text{III.}\quad z^3 - b^3q = o$$

die Größen y und z zu eliminiren.

3) Man kubire die Gleichung I, und setze für y^3, z^3, ihre Werthe a^3p, b^3q aus II und III, desgleichen x für $y + z$, so erhält man

$$x^3 = a^3p + b^3q + 3yzx$$

oder $x^3 - a^3p - b^3q = 3yzx$

4) Man kubire diese Gleichung abermals, so entstehet

$$(x^3 - a^3p - b^3q)^3 = 27y^3z^3x^3$$

und wenn man für y^3, z^3, ihre Werthe setzt

$$(x^3 - a^3p - b^3q)^3 = 27a^3b^3pqx^3.$$

5) Wird diese Gleichung entwickelt und geordnet, so erhält man

$$x^9 - 3(a^3p + b^3q)x^6 + [3(a^3p + b^3q)^2 - 27a^3b^3pq]x^3$$
$$- (a^3p + b^3q)^3 = 0,$$

und da dieselbe vom neunten Grade ist, so ist sie, wie aus 1 erhellet, die einfachste rationale Gleichung, welche sich aus $x = a\sqrt[3]{p} + b\sqrt[3]{q}$ ableiten läßt.

§ 103.

Aufg. Die Gleichung $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ rational zu machen.

Aufl. 1) Da die quadratischen Wurzelgrößen sowohl positiv als negativ genommen werden können, so giebt die Verbindung derselben zum Werthe von x die folgenden acht Wurzeln der gesuchten Gleichung:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \quad -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}, \quad -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}, \quad -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}, \quad -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

2) Da hier jede zwey einander gegenüber stehende Wurzeln gleich, aber entgegengesetzt sind, so kann die Gleichung nur

gerade Potenzen von x enthalten, und sie wird daher, wenn man $x^2 = y$ setzt, die folgende Form erhalten:

$$y^4 - Ay^3 + By^2 - Cy + D = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung werden seyn

$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^2, \quad (\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r})^2$$
$$(\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r})^2, \quad (\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r})^2$$

3) Um nun hieraus die Coefficienten A, B, C, D, zu bestimmen, dürfte man nur die Summe dieser Wurzeln, die Summe ihrer Amben, u. s. w. nehmen. Das folgende Verfahren, das im Vorhergehenden schon oft angewandt worden, führt hier kürzer zum Zwecke. Es sollen $S1$, $S2$, $S3$, $S4$, die Summe dieser Wurzeln, die Summe ihrer Quadrate, ihrer Cuben und Biquadrate bezeichnen, so ist, wenn in § 9 $-A$ und $-C$ für A und C, und das Summenzeichen S für das dortige [ ] gesetzt wird,

$$A = S1$$
$$B = \frac{AS1 - S2}{2}$$
$$C = \frac{BS1 - AS2 + S3}{3}$$
$$D = \frac{CS1 - BS2 + AS3 - S4}{4}$$

4) Die Ausdrücke $S1$, $S2$, $S3$, $S4$, müssen nothwendig rational seyn, weil sonst die Coefficienten A, B, C, D, nicht rational seyn könnten. Es müssen sich also die Wurzelgrößen in den Entwickelungen derselben wechselseitig aufheben, und sie können daher bey der Rechnung gänzlich außer Acht gelassen werden. Mit Hinsicht auf diese Bemerkung, und indem man das Trinom $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ als ein Binom $\sqrt{p} + (\sqrt{q} + \sqrt{r})$ behandelt, kommt die Rechnung wie folgt zu stehen:

$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^2 = p + q + r +$ ꝛc.

$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^4 = p^2 + 6p(\sqrt{q}+\sqrt{r})^2 + (\sqrt{q}+\sqrt{r})^4$ ꝛc.

$= p^2 + 6p(q+r) + q^2 + 6qr + r^2 +$ ꝛc.

$= p^2 + q^2 + r^2 + 6(pq + pr + qr) +$ ꝛc.

$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^6 = p^3 + 15p^2(\sqrt{q}+\sqrt{r})^2 + 15p(\sqrt{q}+\sqrt{r})^4 + (\sqrt{q}+\sqrt{r})^6 +$ ꝛc.

$= p^3 + 15p^2(q+r) + 15p(q^2+6qr+r^2) + q^3 + 15q^2r + 15qr^2 + r^3 +$ ꝛc.

$= p^3 + q^3 + r^3 + 15(p^2q + pq^2 + p^2r + pr^2 + q^2r + qr^2) + 99pqr +$ ꝛc.

$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^8 = p^4 + 28p^3(\sqrt{q}+\sqrt{r})^2 + 70p^2(\sqrt{q}+\sqrt{r})^4 + 28p(\sqrt{q}+\sqrt{r})^6 + (\sqrt{q}+\sqrt{r})^8 +$ ꝛc.

$= p^4 + 28p^3(q+r) + 70p^2(q^2+6qr+r^2) + 28p(q^3 + 15q^2r + 15qr^2 + r^3) + q^4 + 28q^3r + 70q^2r^2 + 28qr^3 + r^4$ ꝛc.

$= p^4 + q^4 + r^4 + 28(p^3q + pq^3 + p^3r + pr^3 + q^3r + qr^3) + 70(p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2) + 420(pqr^2 + pq^2r + p^2qr) +$ ꝛc.

5) Es ist leicht einzusehen, daß, wenn man anstatt $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ jeden andern von den Ausdrücken $\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$, $\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$, $\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$ zu denselben Potenzen erhoben hätte, die rationalen Theile die nämlichen gewesen wären. Da sich nun in S1, S2, S3, S4, die rationalen Glieder aufheben müssen, so erhält man,

$S1 = 4(p+q+r)$

$S2 = 4[p^2+q^2+r^2+6(pq+pr+qr)]$

$S3 = 4[p^3+q^3+r^3+15(p^2q+pq^2+p^2r+pr^2+q^2r+qr^2)+90pqr]$

$S4 = 4[p^4+q^4+r^4+28(p^3q+pq^3+p^3r+pr^3+q^3r+qr^3)+70(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2)+420(pqr^2+pq^2r+p^2qr)]$

oder kürzer, wenn man das Summenzeichen [] sich auf die Größen p, q, r, beziehen läßt,

$$S1 = 4\,[1]$$
$$S2 = 4\,([2] + 6[1^2])$$
$$S3 = 4\,([3] + 15[12] + 90[1^3])$$
$$S4 = 4\,([4] + 28[13] + 70[2^2] + 420[1^2 2])$$

6) Werden diese Werthe in den Gleichungen in 3 substituirt, so erhält man die Coefficienten A, B, C, D, durch die gegebenen Größen p, q, r, ausgedrückt.

§ 104.

Aufg. Die Gleichung $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s}$ rational zu machen.

Aufl. 1) Durch Schlüsse wie in 1 und 2 des vor. §'s läßt sich zeigen, daß, wenn $x^2 = y$ gesetzt wird, die von Wurzelgrößen befreyte Gleichung von der Form

$$y^8 - Ay^7 + By^6 - Cy^5 + Dy^4 - Ey^3 + Fy^2$$
$$- Gy + H = 0$$

seyn, und die folgenden Ausdrücke zu Wurzeln haben wird:

$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s})^2$$
$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} - \sqrt{s})^2$$
$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} + \sqrt{s})^2$$
$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} - \sqrt{s})^2$$
$$(\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s})^2$$
$$(\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} - \sqrt{s})^2$$
$$(\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} + \sqrt{s})^2$$
$$(\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} - \sqrt{s})^2$$

2) Man lasse dem Zeichen S seine Bedeutung, welche es im vor. § hatte, und suche vor allem die Ausdrücke S1, S2, S3, ... S8 zu bestimmen. Da die Rechnung auf eine ähnliche Art wie im vor. § geführt wird, so will ich mich nicht lange

lange dabey aufhalten, und nur erinnern, daß man bey der Erhebung den Ausdruck $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s}$ als ein Binom ansehen kann, dessen beyde Theile $\sqrt{s}$ und $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ sind.

3) Dem zufolge hat man

$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s})^2 =$$
$$s + (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^2 + \text{rc.}$$
$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s})^4 =$$
$$s^2 + 6s(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^2 + (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^4 + \text{rc.}$$
$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s})^6 =$$
$$s^3 + 15s^2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^2 + 15s(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^4$$
$$+ (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^6 + \text{rc.}$$

rc.

oder, wenn die Entwickelungen der Potenzen von $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ in 4 des vor. §'s gebraucht werden,

$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s})^2 =$$
$$p + q + r + s + \text{rc.}$$
$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s})^4 =$$
$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 6(pq + pr + ps + qr + qs + rs) + \text{rc.}$$
$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s})^6 =$$
$$p^3 + q^3 + r^3 + s^3 + 15(p^2q + pq^2 + p^2r + pr^2 + p^2s + ps^2$$
$$+ q^2r + qr^2 + q^2s + qs^2 + r^2s + rs^2) + 90(pqr + pqs + prs$$
$$+ qrs) + \text{rc.}$$

rc.

worin bloß die irrationalen Glieder weggelassen worden.

4) Aus denselben Gründen, wie in 5 des vor. §'s, erhält man nun hieraus,

$$S1 = 8\,[1]$$
$$S2 = 8\,([2] + 6\,[1^2])$$
$$S3 = 8\,([3] + 15[12] + 90\,[1^3])$$

rc.

und die Substitution dieser Werthe in den Formeln in 3 des vor. §'s, welche zu dem Ende weiter fortgesetzt werden müssen, giebt die Coefficienten A, B, C, ꝛc.

§ 105.

Aufg. Die Gleichung vom ersten Grade mit einer unbestimmten Anzahl quadratischer Wurzelgrößen

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s} + \ldots\ldots + \sqrt{w}.$$

rational zu machen.

Aufl. 1) Aus den beyden vorhergehenden §en ist leicht abzunehmen, daß wenn n die Anzahl der Wurzelgrößen $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}, \ldots \sqrt{w}$ ist, der Grad der rationalen Gleichung der Potenz 2^n gleich seyn werde. Da nun aber die verschiedenen Werthe des x so beschaffen sind, daß immer zwey derselben einander gleich und entgegengesetzt sind, so steigt die Gleichung nur auf den Grad 2^{n-1}, wenn $x^2 = y$ gesetzt wird.

2) Die Schlüsse in den beyden vorhergehenden §en weiter fortgesetzt, geben die folgenden Resultate:

$$S1 = 2^{n-1}\ [1]$$
$$S2 = 2^{n-1}\ ([2] + 6[1^2])$$
$$S3 = 2^{n-1}\ ([3] + 15[12] + 90[1^3])$$
$$S4 = 2^{n-1}\ ([4] + 28[13] + 70[2^2] + 420[1^2 2] + 2520[1^4])$$
$$S5 = 2^{n-1}\ ([5] + 45[14] + 210[23] + 1260[1^2 3] + 3150[12^2] + 18900[1^3 2] + 113400[1^3])$$

ꝛc.

3) Das Gesetz der Formation ist hieraus leicht zu erkennen. Des Beyspiels wegen will ich S5 nehmen. Die Zahl 5 und ihre Zerfällungen in Binionen, Ternionen, u. s. w. geben die Summenausdrücke [5], [14], [23], $[1^2 3]$, $[12^2]$,

$[1^3 2]$, $[1^5]$. Die Coefficienten sind nichts anders, als die Versetzungszahlen von Complexionen, deren Wiederholungs-Exponenten doppelt so groß sind, als die Wurzelexponenten des Summenausdrucks, also die Coefficienten von $[5]$, $[14]$, $[23]$, $[1^2 3]$, $[12^2]$, $[1^3 2]$, $[1^5]$, die Versetzungszahlen der Complexionen a^{10}, a^2b^8, a^4b^6, $a^2b^2c^6$, $a^2b^4c^4$, $a^2b^2c^2d^4$, $a^2b^2c^2d^2e^2$, oder 1, 45, 210, 1260, 3150, 18900, 113400. Für diejenigen meiner Leser, welche den polynomischen Lehrsatz verstehen, kann es nicht die geringste Schwierigkeit haben, den Grund hiervon einzusehen. Denn nach den beyden vorhergehenden §en sind die Ausdrücke S1, S2, S3, ꝛc., wenn 2^{n-1} beyseit gesetzt wird, nichts anders, als die Entwickelungen der zweyten, vierten, sechsten, achten, u. s. w. Potenz von $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \ldots\ldots + \sqrt{w}$ mit Uebergehung aller derjenigen Glieder, welche Wurzelgrößen enthalten, oder, was auf eins hinausläuft, die Entwickelungen der geraden Potenzen von $p+q+r+\ldots\ldots+w$, mit Uebergehung aller derjenigen Glieder, worin ungerade Exponenten vorkommen, und Halbirung der Exponenten in den übrig bleibenden.

4) Setzt man nun $2^n = m$, so ist die gesuchte rationale Gleichung

$$x^m - Ax^{m-2} + Bx^{m-4} - Cx^{m-6} + \text{ꝛc.} = 0$$

und die Coefficienten A, B, C, ꝛc. werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$A = S1$$
$$2B = AS1 - S2$$
$$3C = BS1 - AS2 + S3$$
ꝛc.

Anmerk. Hierher gehört die berühmte Aufgabe, welche Fermat den Analysten seiner Zeit vorlegte, und zu deren

Auflösung er besonders Descartes aufforderte (M. s. Klügels mathem. Wörterb. Th. II. Art. Irrational. S. 954. Sie sollten nämlich aus der Gleichung

$$ab = \sqrt{(ab - a^2)} + \sqrt{(a^2 + ad + z^2)} + \sqrt{ma} + \sqrt{(d^2 - a^2)} - \sqrt{(ar + a^2)}$$

die Wurzelgrößen wegschaffen. Man darf nur x für ab, und für die zusammengesetzten Größen unter den Wurzelzeichen die Monomen p, q, r, s, t, setzen, so kommt es bloß darauf an, die Gleichung $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s} + \sqrt{t}$ rational zu machen, und in der erhaltenen Gleichung für x, p, q, r, s, t, wieder ihre Werthe zu substituiren. (Ueber diesen Gegenstand kann man auch eine Abhandlung von Hauber lesen, welche sich in der zweyten Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen, herausgegeben von Hindenburg, befindet.)

§ 106.

Aufg. Die Gleichung $x = a\sqrt[4]{p} + b\sqrt[4]{p^2} + c\sqrt[4]{p^3}$ rational zu machen

Aufl. 1) Man setze $\sqrt[4]{p} = y$, so wird diese Gleichung

$$x - ay - by^2 - cy^3 = 0.$$

Da nun y vier Werthe erhalten kann, nämlich $+y$, $-y$, $+y\sqrt{-1}$, $-y\sqrt{-1}$, so entstehen die folgenden vier Gleichungen, die alle zugleich statt haben müssen:

$$\begin{aligned}
x - ay \qquad &- by^2 - cy^3 &= 0\\
x + ay \qquad &- by^2 + cy^3 &= 0\\
x - ay\sqrt{-1} &+ by^2 + cy^3\sqrt{-1} &= 0\\
x + ay\sqrt{-1} &+ by^2 - cy^3\sqrt{-1} &= 0
\end{aligned}$$

oder

$$(x - by^2) - (ay + cy^3) \qquad = 0$$
$$(x - by^2) + (ay + cy^3) \qquad = 0$$
$$(x + by^2) - (ay - cy^3)\sqrt{-1} = 0$$
$$(x + by^2) + (ay - cy^3)\sqrt{-1} = 0$$

Die gesuchte Gleichung muß also das Produkt derselben seyn.

2) Werden die beyden ersten und die beyden letzten mit einander multiplicirt, so erhält man

$$x^2 - 2by^2x + b^2y^4 - a^2y^2 - 2acy^4 - c^2y^6 = 0$$
$$x^2 + 2by^2x + b^2y^4 + a^2y^2 - 2acy^4 + c^2y^6 = 0$$

oder, wenn man in diesen Gleichungen p für y^4 setzt,

$$(x^2 + (b^2 - 2ac)p) - (2bx + a^2 + c^2p)y^2 = 0$$
$$(x^2 + (b^2 - 2ac)p) + (2bx + a^2 + c^2p)y^2 = 0$$

3) Multiplicirt man diese Gleichungen, und setzt hierauf p für y^4, so erhält man die gesuchte rationale Gleichung vom vierten Grade,

$$x^4 - 2(b^2 + 2ac)px^2 - 4(a^2 + c^2p)bpx$$
$$+ (b^2 - 2ac)^2p^2 - (a^2 + c^2p)^2p = 0$$

und die vier Wurzeln dieser Gleichung sind,

$$a\sqrt[4]{p} \qquad + b\sqrt[4]{p^2} + c\sqrt[4]{p^3}$$
$$- a\sqrt[4]{p} \qquad + b\sqrt[4]{p^2} - c\sqrt[4]{p^3}$$
$$a\sqrt[4]{p}\,.\sqrt{-1} - b\sqrt[4]{p^2} - c\sqrt[4]{p^3}\,.\sqrt{-1}$$
$$- a\sqrt[4]{p}\,.\sqrt{-1} - b\sqrt[4]{p^2} + c\sqrt[4]{p^3}\,.\sqrt{-1}$$

Zus. Wenn also eine Gleichung vom vierten Grade die hier gefundene Form hat, so lassen sich jedesmal die vier Wurzeln derselben ohne weitere Rechnung finden. Ich will nun zeigen, daß man, die Auflösung der kubischen Gleichungen vorausgesetzt, einer jeden Gleichung vom vierten Grade diese Form geben könne.

§ 107.

Es sey

$$x^4 - Ax^2 - Bx - C = 0$$

die aufzulösende Gleichung; sie ist allgemein, weil man in jeder Gleichung immer das zweyte Glied wegschaffen kann, wenn es nicht schon fehlen sollte. Soll nun diese Gleichung mit der in 3 des vor. §'s identisch seyn, so muß man haben

$$\text{I.}\quad 2p(b^2 + 2ac) = A$$

$$\text{II.}\quad 4bp(a^2 + c^2p) = B$$

$$\text{III.}\quad (a^2 + c^2p)^2p - (b^2 - 2ac)^2p^2 = C$$

Die beyden ersten Gleichungen geben

$$(b^2 + 2ac)p = \frac{A}{2}$$

$$a^2 + c^2p = \frac{B}{4bp}$$

und bringt man diese Werthe in die Gleichung III, nachdem man derselben vorher die Form

$$(a^2 + c^2p)^2p - (b^2 + 2ac)^2p^2 + 8ab^2cp^2 = C$$

gegeben hat, so erhält man

$$\frac{B^2}{16b^2p} - \frac{A^2}{4} + 8ab^2cp^2 = C$$

Aus der Gleichung I erhält man auch

$$\text{IV.}\quad 4acp = A - 2b^2p$$

und die Substitution dieses Werthes in der eben gefundenen Gleichung giebt,

$$\frac{B^2}{16b^2p} - \frac{A^2}{4} + 2Ab^2p - 4b^4p^2 = C$$

Da die drey Gleichungen I, II, III, vier unbestimmte Größen a, b, c, p, enthalten, so kann man eine derselben

nach Willkühr annehmen. Man setze $b = 1$, so wird nach Wegschaffung der Nenner

$$B^2 - 4A^2p + 32Ap^2 - 64p^3 = 16Cp$$

oder nach p geordnet

$$\text{V.}\quad p^3 - \tfrac{1}{2}Ap^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}A^2)p - \tfrac{1}{64}B^2 = 0$$

eine Gleichung vom dritten Grade, welche bloß die unbekannte Größe p enthält.

Aus den Gleichungen II und IV erhält man, wenn $b=1$ gesetzt, und die letztere durch $2\sqrt{p}$ dividirt wird,

$$a^2 + c^2p = \frac{B}{4p}, \quad 2ac\sqrt{p} = \frac{A-2p}{2\sqrt{p}}$$

und wenn man die zweyte zur ersten addirt, und auch von derselben subtrahirt, hierauf ferner aus der Summe und dem Reste die Quadratwurzel ziehet,

$$a + c\sqrt{p} = \sqrt{\left(\frac{B}{4p} + \frac{A}{2\sqrt{p}} - \sqrt{p}\right)}$$

$$a - c\sqrt{p} = \sqrt{\left(\frac{B}{4p} - \frac{A}{2\sqrt{p}} + \sqrt{p}\right)}$$

Den vier Wurzeln in 3 des vor. §'s läßt sich aber, wenn $b=1$ gesetzt wird, die folgende Form geben

$$\sqrt{p} + (a + c\sqrt{p})\sqrt[4]{p}$$

$$\sqrt{p} - (a + c\sqrt{p})\sqrt[4]{p}$$

$$-\sqrt{p} + (a - c\sqrt{p})\sqrt[4]{p}\cdot\sqrt{-1}$$

$$-\sqrt{p} - (a - c\sqrt{p})\sqrt[4]{p}\cdot\sqrt{-1}$$

und wenn man hierin für $a + c\sqrt{p}$, $a - c\sqrt{p}$ ihre Werthe setzt, so erhält man die folgenden Wurzeln der Gleichung $x^4 - Ax^2 - Bx - C = 0$:

$$\sqrt{p} + \frac{1}{2\sqrt{p}} \sqrt{(B\sqrt{p} + 2Ap - 4p^2)}$$

$$\sqrt{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}} \sqrt{(B\sqrt{p} + 2Ap - 4p^2)}$$

$$-\sqrt{p} + \frac{1}{2\sqrt{p}} \sqrt{(-\sqrt{p} + 2Ap - 4p^2)}$$

$$-\sqrt{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}} \sqrt{(-\sqrt{p} + 2Ap - 4p^2)}$$

Hat man daher aus der Gleichung V den Werth von p bestimmt, so hat man auch die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Es ist übrigens gleichgültig, welchen von den drey Werthen des p man brauchen will, weil man nothwendig in jedem Falle immer dieselben Wurzeln erhalten muß.

§ 108.

Aufg. Die Gleichung

$$x = a\sqrt[5]{p} + b\sqrt[5]{p^2} + c\sqrt[5]{p^3} + d\sqrt[5]{p^4}$$

rational zu machen.

Aufl. 1) Wenn man $\sqrt[5]{p} = y$, also $y^5 - p = o$ setzt, so verwandelt sich die Gleichung in

$$x - ay - by^2 - cy^3 - dy^4 = o.$$

Nun kann aber y fünf Werthe erhalten, nämlich αy, βy, γy, δy, εy, wenn α, β, γ, δ, ε, die fünf Wurzeln der Gleichung $y^5 - 1 = o$ bezeichnen (die Einheit mit eingeschlossen); man hat also folgende fünf partikuläre Gleichungen:

$$x - \alpha a y - \alpha^2 b y^2 - \alpha^3 c y^3 - \alpha^4 d y^4 = o$$
$$x - \beta a y - \beta^2 b y^2 - \beta^3 c y^3 - \beta^4 d y^4 = o$$
$$x - \gamma a y - \gamma^2 b y^2 - \gamma^3 c y^3 - \gamma^4 d y^4 = o$$
$$x - \delta a y - \delta^2 b y^2 - \delta^3 c y^3 - \delta^4 d y^4 = o$$
$$x - \varepsilon a y - \varepsilon^2 b y^2 - \varepsilon^3 c y^3 - \varepsilon^4 d y^4 = o$$

und das Produkt derselben würde die gesuchte rationale Gleichung geben, wenn man wieder $\sqrt[5]{p}$ für y setzte.

2) Im Grunde heißt dieses nicht anders, als aus den beyden Gleichungen $x - ay - by^2 - cy^3 - dy^4 = 0$, $y^5 - p = 0$, das y eliminiren, und es finden daher hier alle in dem vorigen Capitel angegebene Eliminations-Methoden ihre Anwendung. Wollte man die Cramersche als die leichteste anwenden, so würde man auf Summenausdrücke kommen, welche die Gränzen der angehängten Tafeln überschreiten, und daher erst berechnet werden müßten. Man erreicht aber seinen Zweck weit kürzer, wenn man die Rechnung so einrichtet, daß die Summenausdrücke sich nur auf die Wurzeln der Einheit beziehen, weil diese sich leichter berechnen lassen.

3) Zu dem Ende darf man nur aus den beyden Gleichungen

$$\text{I.}\quad z^5 - 1 = 0$$

$$\text{II.}\quad x - ayz - by^2z^2 - cy^3z^3 - dy^4z^4 = 0$$

die Größe z eliminiren; denn substituirt man in II die fünf Werthe α, β, γ, δ, ε, des z aus der ersten, so erhält man die nämlichen Gleichungen wie in 1.

4) Man gebe, um die Cramersche Eliminations-Methode (§ 75) anwenden zu können, der Gleichung II die Form

$$1 + (1)\,z + (2)\,z^2 + (3)\,z^3 + (4)\,z^4 = 0$$

alsdann ist $(1) = -\frac{ay}{x}$, $(2) = -\frac{by^2}{x}$, $(3) = -\frac{cy^3}{x}$, $(4) = -\frac{dy^4}{x}$.

5) Da sich die Summenausdrücke, welche in der Gleichung § 57 8. c vorkommen, bey dem vorliegenden Falle auf die Wurzeln der Gleichung $z^5 - 1 = 0$ beziehen, so verschwinden, wegen 2. § 94, alle diejenigen, in welchen die Summe

der Wurzelexponenten nicht durch 5 theilbar ist. Mit Hinsicht auf diese Bemerkung erhält man also die folgende Endgleichung:

$$\begin{array}{l}
0 = 1 + (14)'[14] + (24^2)'[24^2] + (34^3)'[34^3] + (4^5)'[4^5] \\
\quad + (23)'[23] + (3^2 4)'[3^2 4] + (124^3)'[124^3] \\
\quad + (1^2 3)'[1^2 3] + (1^2 4^2)'[1^2 4^2] + (13^2 4^2)'[13^2 4^2] \\
\quad + (12^2)'[12^2] + (1234)'[1234] + (2^2 34^2)'[2^2 34^2] \\
\quad + (1^3 2)'[1^3 2] + (13^3)'[13^3] + (23^3 4)'[23^3 4] \\
\quad + (1^5)'[1^5] + (2^3 4)'[2^3 4] + (3^5)[3^5] \\
\qquad\qquad + (2^2 3^2)'[2^2 3^2] \\
\qquad\qquad + (1^3 34)'[1^3 34] \\
\qquad\qquad + (1^2 2^2 4)'[1^2 2^2 4] \\
\qquad\qquad + (1^2 23^2)'[1^2 23^2] \\
\qquad\qquad + (12^3 3)'[12^3 3] \\
\qquad\qquad + (2^5)'[2^5]
\end{array}$$

6) Die hier vorkommenden Summenausdrücke können nach § 94 berechnet werden, welches für den vorliegenden Fall eben nicht schwer ist. Setzt man hierauf für die Zeichen (1), (2), (3), (4) wieder ihre Werthe aus 4, desgleichen p für y^5, und multiplicirt die Gleichung mit x^5, so erhält man,

$$0 =$$

$$\begin{array}{l}
x^5 \left.\begin{array}{l} -5ad \\ -5bc \end{array}\right) px^3 \left.\begin{array}{l} -5bd^2 \\ -5c^2d \end{array}\right) p^2x - 5cd^3p^3x - d^5p^4 \\
\left.\begin{array}{l} -5a^2c \\ -5ab^2 \end{array}\right) px^2 \left.\begin{array}{l} +5a^2d^2 \\ -5abcd \\ -5ac^3 \\ -5b^3d \\ +5b^2c^2 \end{array}\right\} p^2x \left.\begin{array}{l} +5abd^3 \\ -5ac^2d^2 \\ -5b^2cd^2 \\ +5bc^3d \\ -c^5 \end{array}\right\} p^3 \\
-5a^3bpx \\
-a^5p \qquad \left.\begin{array}{l} +5a^3cd \\ -5a^2b^2d \\ -5a^2bc^2 \\ +5ab^3c \\ -b^5 \end{array}\right\} p^2
\end{array}$$

7) Wird also die gesuchte rationale Gleichung durch

$$x^5 - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = 0$$

vorgestellt, so ist

$$A = 5\,(ad + bc)\,p$$

$$B = 5\,(a^2c + ab^2 + bd^2p + c^2dp)\,p$$

$$C = 5\,(a^3b + b^3dp + ac^3p + cd^3p^2)\,p - 5\,(a^2d^2 + b^2c^2)\,p^2 + 5\,abcdp^2$$

$$D = a^5p + b^5p^2 + c^5p^3 + d^5p^4 - 5\,(a^3cd + ab^3c + bc^3dp + abd^3p)\,p^2 + 5\,(a^2b^2d + a^2bc^2 + ac^2d^2p + b^2cd^2p)\,p^2$$

§ 109.

Die Gleichung $x = a\sqrt[5]{p} + b\sqrt[5]{p^2} + c\sqrt[6]{p^3} + d\sqrt[5]{p^4}$ führte auf eine Gleichung des fünften Grades von der in 7 des vor. §'s angegebenen Form, und die fünf Wurzeln dieser letztern Gleichung sind daher

$$x = \alpha a\sqrt[6]{p} + \alpha^2 b\sqrt[5]{p^2} + \alpha^3 c\sqrt[5]{p^3} + \alpha^4 d\sqrt[5]{p^4}$$

$$x = \beta a\sqrt[6]{p} + \beta^2 b\sqrt[5]{p^2} + \beta^3 c\sqrt[5]{p^3} + \beta^4 d\sqrt[5]{p^4}$$

$$x = \gamma a\sqrt[5]{p} + \gamma^2 b\sqrt[5]{p^2} + \gamma^3 c\sqrt[5]{p^3} + \gamma^4 d\sqrt[5]{p^4}$$

$$x = \delta a\sqrt[5]{p} + \delta^2 b\sqrt[5]{p^2} + \delta^3 c\sqrt[5]{p^3} + \delta^4 d\sqrt[5]{p^4}$$

$$x = \varepsilon a\sqrt[5]{p} + \varepsilon^2 b\sqrt[6]{p^2} + \varepsilon^3 c\sqrt[5]{p^3} + \varepsilon^4 d\sqrt[5]{p^4}$$

Hat also umgekehrt eine Gleichung des fünften Grades die angegebene Form, so hat man auf der Stelle die Wurzeln derselben. Könnte man demnach eine jede gegebene Gleichung des fünften Grades auf diese Form bringen, so hätte man die allgemeine Auflösung der Gleichungen dieses Grades. Hierzu würde unumgänglich erfordert, aus den gegebenen Coefficienten A, B, C, D, vermittelst der Gleichungen in 7 des vor. §'s, die Größen a, b, c, d, p, deren eine willkührlich ist, be=

stimmen zu können, auf eine ähnliche Art, wie dies in § 107 bey den Gleichungen des vierten Grades der Fall war, und auch in § 99, wo die transformirte Gleichung die Cardanische Form erhielt. Aber alle Bemühungen der größten Analysten zur Erreichung dieses Zweckes waren fruchtlos, und wir werden in der Folge sehen, warum sie es seyn mußten. Man wird indessen noch immer mit Vergnügen und Belehrung eine Abhandlung von Euler über die allgemeine Auflösung der Gleichungen, und insbesondere der des fünften Grades lesen, welche sich im neunten Theile der neuen Petersburger Commentarien, und auch im dritten Theile der von Michelsen übersetzten Eulerschen Introduktion befindet.

§ 110.

Obgleich aber wir nicht im Stande sind, die allgemeine Auflösung der Gleichungen des fünften Grades auf dem Wege des vor. §'s zu erhalten, so lassen sich doch mehrere specielle Gleichungen angeben, bey welchen diese Auflösung möglich ist, von welchen ich mit Euler nur diejenigen anführen will, welche zu nicht sehr verwickelten Formen führen.

I. Setzt man in den Gleichungen in 7. §. 108 $c = 0$, $d = 0$, so hat man

$$A = 0,\ B = 5ab^2p,\ C = 5a^3bp,$$
$$D = a^5p + b^5p^2.$$

Aus der zweyten und dritten dieser Gleichungen erhält man

$$a^5p = \frac{C^2}{5B},\ b^5p^2 = \frac{B^3}{25C}$$

mithin

$$D = \frac{C^2}{5B} + \frac{B^3}{25C}.$$

Auch ist

$$a\sqrt[5]{p} = \sqrt[5]{\frac{C^2}{5B}}, \quad b\sqrt[5]{p^2} = \sqrt[5]{\frac{B^3}{25C}}.$$

Ist demnach die Gleichung

$$x^5 - Bx^2 - Cx - \frac{C^2}{5B} - \frac{B^3}{25C} = 0$$

gegeben, so ist

$$\alpha\sqrt[5]{\frac{C^2}{5B}} + \alpha^2\sqrt[5]{\frac{B^3}{25C}}$$

eine Wurzel derselben, und die übrigen Wurzeln werden erhalten, wenn man für α nach und nach β, γ, δ, ε setzt.

Die nämliche Gleichung und die nämlichen Wurzeln würde man auch gefunden haben, wenn man a und b, oder a und c, oder b und d = o gesetzt hätte. Setzt man z. B. b = o und d = o, so hat man

$$A = 0, \quad B = 5a^2cp, \quad C = 5ac^3p^2$$
$$D = a^5p + c^5p^3.$$

Aus der zweyten und dritten Gleichung erhält man

$$a^5p = \frac{B^3}{25C}; \quad c^5p^3 = \frac{C^2}{5B}$$

und diese geben

$$D = \frac{B^3}{25C} + \frac{C^2}{5B}$$

$$a\sqrt[5]{p} = \sqrt[5]{\frac{B^3}{25C}}, \quad c\sqrt[5]{p^3} = \sqrt[5]{\frac{C^2}{5B}}$$

Man hat also wieder die Gleichung

$$x^5 - Bx^2 - Cx - \frac{B^3}{25C} - \frac{C^2}{5B} = 0$$

und eine Wurzel derselben

$$= \alpha a\sqrt[5]{p} + \alpha^3 c\sqrt[5]{p^3} = \alpha\sqrt[5]{\frac{B^3}{25C}} + \alpha^3\sqrt[5]{\frac{C^2}{5B}}$$

Die übrigen werden erhalten, wenn man für α nach und nach

β, γ, δ, ε setzt. Daß übrigens die fünf Wurzeln, welche man dadurch findet, von jenen vorhin gefundenen nicht verschieden sind, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man α^2, α^3, α^4, α^5 $(= 1)$ für β, γ, δ, ε setzt (§ 86).

II. Setzt man in den Gleichungen in 7. §. 107 $b = 0$ und $c = 0$, so erhält man

$$A = 5adp,\ B = 0,\ C = -5a^2d^2p^2,$$
$$D = a^5p + d^5p^4$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen geben

$$C = -\frac{A^2}{5}.$$

Ferner giebt die vierte

$$D^2 = (a^5p + d^5p^4)^2 = (a^5p - d^5p^4)^2 + 4a^5d^5p^5$$
$$= (a^5p - d^5p^4)^2 + 4\left(\frac{A}{5}\right)^5$$

also

$$a^5p - d^5p^4 = \sqrt{\left[D^2 - 4\left(\frac{A}{5}\right)^5\right]}$$

Da nun

$$a^5p + d^5p^4 = D$$

so ist

$$a^5p = \tfrac{1}{2}D + \sqrt{\left[\tfrac{1}{4}D^2 - \left(\frac{A}{5}\right)^5\right]}$$

$$d^5p^4 = \tfrac{1}{2}D - \sqrt{\left[\tfrac{1}{4}D^2 - \left(\frac{A}{5}\right)^5\right]}$$

und daher

$$a\sqrt[5]{p} = \sqrt[5]{\left[\tfrac{1}{2}D + \sqrt{\left[\tfrac{1}{4}D^2 - \left(\frac{A}{5}\right)^5\right]}\right]}$$

$$d\sqrt[5]{p^4} = \sqrt[5]{\left[\tfrac{1}{2}D - \sqrt{\left[\tfrac{1}{4}D^2 - \left(\frac{A}{5}\right)^5\right]}\right]}$$

Ist demnach die Gleichung

$$x^5 - Ax^3 + \frac{A^2}{5}x - D = 0$$

so wird jede ihrer Wurzeln durch

$$\alpha \sqrt[5]{\left[\tfrac{3}{2}D + \sqrt{\left[\tfrac{1}{4}D^2 - \left(\frac{A}{5}\right)^5\right]}\right]} +$$

$$\alpha^4 \sqrt[5]{\left[\tfrac{1}{2}D - \sqrt{\left[\tfrac{1}{4}D - \left(\frac{A}{5}\right)^5\right]}\right]}$$

ausgedrückt. Diese Wurzel hat, wie man siehet, große Aehnlichkeit mit derjenigen, welche die Cardanische Formel für die Gleichungen des dritten Grades giebt. Diese Gleichung gehört übrigens zu einer eigenen Classe von speciellen Gleichungen von allen Graden, deren Auflösung Moivre zuerst gelehrt hat, und von welchen weiter hin die Rede seyn wird.

§ 111.

Auf die nämliche Art, wie in § 109 die Gleichung $x = a\sqrt[5]{p} + b\sqrt[5]{p^2} + c\sqrt[5]{p^3} + d\sqrt[5]{p^4}$ rational gemacht wurde, läßt sich überhaupt eine jede andere Gleichung von der Form

$$x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + \ldots\ldots + k\sqrt[n]{p^{n-1}}$$

rational machen, und der Grad der rationalen Gleichung wird alsdann immer dem Wurzelindex gleich seyn. Es giebt hierbey keine andere Schwierigkeit als die Mühe der Ausrechnung. Hauber hat diese Mühe für $n = 6$ übernommen (M. s. die zweyte Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen, S. 248). Es wäre gut, wenn man es auch für andere Werthe von n thun möchte, weil man daraus, wie so eben an einigen Beyspielen gezeigt worden, die Auflösungen von sehr vielen speciellen Gleichungen herleiten könnte, die um so merkwürdiger sind, da sie nicht zerlegt werden können, weil sonst in den Wurzeln keine Radikalien von eben den Graden

als die Gleichungen selbst vorkommen dürften. Es lassen sich aber auch sehr viele dergleichen specielle Fälle ohne so verwickelte Rechnungen finden, wenn man aus dem allgemeinen irrationalen Ausdrucke $a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + \ldots\ldots + k\sqrt[n]{p^{n-1}}$ gleich anfangs mehrere Glieder wegläßt, wie die folgenden Aufgaben zeigen werden.

§ 112.

Aufg. Die Gleichung $x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2}$ rational zu machen.

Aufl. Es müssen hier die beyden Fälle unterschieden werden, wo n eine gerade, und wo n eine ungerade Zahl ist.

Erster Fall.

1) Es sey $x = a\sqrt[2m]{p} + b\sqrt[2m]{p^2}$; es seyen ferner α, β, γ, δ, 2c. die Wurzeln der Gleichung $x^{2m} - 1 = 0$. Wird y für $\sqrt[2m]{p}$ gesetzt, so sind die verschiedenen Werthe, welche x in Hinsicht auf diese Wurzelgröße erhalten kann,

$$\alpha a y + \alpha^2 b y^2$$
$$\beta a y + \beta^2 b y^2$$
$$\gamma a y + \gamma^2 b y^2$$
2c.

an der Zahl 2m. Die gesuchte rationale Gleichung werde durch

$$x^{2m} - \overset{1}{A}x^{2m-1} + \overset{2}{A}x^{2m-2} - \overset{3}{A}x^{2m-3} + \ldots$$
$$\ldots + \overset{m}{A}x^{m} \mp \overset{m+1}{A}x^{m-1} \pm \overset{m+2}{A}x^{m-2} \mp \ldots\ldots$$
$$\ldots - \overset{2m-1}{A}x + \overset{2m}{A} = 0$$

vorgestellt, die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades m. Die Coefficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, 2c. sind als-

dann

dann die Summen der Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. jener Werthe des x.

2) Die Entwickelung dieser Combinationsklassen giebt

$\overset{1}{A} = [1]ay + [2]by^2$

$\overset{2}{A} = [1^2]a^2y^2 + [12]aby^3 + [2^2]b^2y^4$

$\overset{3}{A} = [1^3]a^3y^3 + [1^2 2]a^2by^4 + [1 2^2]ab^2y^5 + [2^3]b^3y^6$

2c.

3) Es ist aber klar, daß nach 2. § 95 alle Coefficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$. 2c. bis zu $\overset{m}{A}$ verschwinden, weil die Summe der Wurzelexponenten in jedem Summenausdrucke, der in denselben vorkommt, immer $<$ 2m, und also nicht durch 2m theilbar seyn kann; auch ist dies schon daraus abzunehmen, daß in der gesuchten Gleichung nur solche Potenzen von y vorkommen dürfen, welche durch 2m theilbar sind, weil sie sonst nicht rational seyn könnte. Es kommt also bloß darauf an, die Coefficienten $\overset{m}{A}$ $\overset{m+1}{A}$, $\overset{m+2}{A}$, ... $\overset{2m}{A}$, zu finden.

4) Wenn man unter den Gliedern, aus welchen diese Coefficienten bestehen, alle diejenigen wegläßt, welche wegen 2. § 95 = o werden, so findet man

$\overset{m}{A} = [2^m]b^m y^{2m}$

$\overset{m+1}{A} = [1^2 2^{m-1}]a^2 b^{m-1} y^{2m}$

$\overset{m+2}{A} = [1^4 2^{m-2}]a^4 b^{m-2} y^{2m}$

$\overset{m+3}{A} = [1^6 2^{m-3}]a^6 b^{m-3} y^{2m}$

. . . .

$\overset{2m-1}{A} = [1^{2m-2} 2]a^{2m-2} b y^{2m}$

$\overset{2m}{B} = [1^{2m}]a^{2m}y^{2m} + [2^{2m}]b^{2m}y^{2m}$

5) Nun ist aber (§ 95)

$$'[2^m] = \mp \frac{1.2.3.\ldots.m-1}{1.2.3.\ldots.m}.2m = \mp 2$$

$$'[1^2 2^{m-1}] = \pm \frac{1.2.3.\ldots\ldots.m}{1.2.3\ldots m-1 \times 1.2}.2m = \pm \frac{m}{1.2}.2m$$

$$'[1^4 2^{m-2}] = \mp \frac{1.2.3.\ldots\ldots.m+1}{1.2\ldots m-2 \times 1.2.3.4} = \mp \frac{m.m^2-1}{1.2.3.4}.2m$$

$$'[1^6 2^{m-3}] = \pm \frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots.m+2}{1.2.3\ldots m-3 \times 1.2\ldots 6}.2m =$$

$$\pm \frac{m.m^2-1.m^2-4}{1.2.3.4.5.6}.2m$$

$$'[1^8 2^{m-4}] = \mp \frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots.m+3}{1.2.3\ldots m-4 \times 1.2\ldots 8}.2m =$$

$$\mp \frac{m.m^2-1.m^2-4.m^2-9}{1.2.3.4.5.6.7.8}.2m$$

. . . .

$$'[1^{2m-2}2] = + \frac{1.2.3.\ldots\ldots.2m-2}{1 \times 1.2.3.\ldots\ldots.2m-2}.2m$$

$$= + \frac{m.m^2-1.m^2-4\ldots.m^2-\overline{m-2}^2}{1.2.3.4.\ldots\ldots\ldots.2m-2}.2m$$

$$'[1^{2m}] = - \frac{1.2.3.\ldots\ldots.2m-1}{1.2.3.\ldots\ldots.2m}.2m = -1$$

$$'[2^{2m}] = + \frac{(1.2.3\ldots m-1)^2}{(1.2\ldots m)^2 \times 1.2}(2m)^2 - \frac{1.2.3\ldots 2m-1}{1.2.3\ldots 2m}.2m$$

$$= +2 - 1 = +1$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn m gerade, die unteren, wenn m ungerade ist.

6) Substituirt man diese Werthe in den Ausdrücken für $\overset{m}{A}, \overset{m+1}{A}, \overset{m+2}{A}$, 2c., und setzt hierauf wieder p für y^{2m}, so erhält man die gesuchte rationale Gleichung

$$x^{2m} - 2b^m p x^m - \frac{m}{1.2}.2m.a^2b^{m-1}px^{m-1}$$

$$- \frac{m.m^2-1}{1.2.3.4}.2m.a^4b^{m-2}px^{m-2}$$

$$- \frac{m.m^2-1.m^2-4}{1.2.3.4.5.6}\,2m.a^6b^{m-3}px^{m-3}$$

$$- \frac{m.m^2-1.m^2-4.m^2-9}{1.2.3.4.5.6.7.8}.2m.a^8b^{m-4}px^{m-5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{m.m^2-1.m^2-4.m^2-9\ldots m^2-\overline{m-2}^2}{1.2.3.4.5.6.7\ldots 2m-2}.2m.a^{2m-2}bpx$$

$$-a^{2m}p + b^{2m}p^2 = 0$$

Zweyter Fall.

7) Es sey jetzt $x = a\sqrt[2m+1]{p} + b\sqrt[2m+1]{p^2}$, oder y für $\sqrt[2m+1]{p}$ gesetzt, $x = ay + by^2$. Es sey ferner

$$x^{2m+1} - \overset{1}{A}x^{2m} + \overset{2}{A}x^{2m-1} - \overset{3}{A}x^{2m-2} + \ldots$$

$$\ldots \mp \overset{m+1}{A}x^m \pm \overset{m+2}{A}x^{m-1} \mp \overset{m+3}{A}x^{m-2} \pm \ldots$$

$$\ldots + \overset{2m}{A}x - \overset{2m+1}{A} = 0$$

die gesuchte Gleichung, die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades m. Wie vorhin verschwinden alsdann alle Coefficienten $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A}$, 2c., bis zu $\overset{m+1}{A}$, und man hat, die Summenausdrücke auf die Gleichung $x^{2m+1} - 1 = 0$ bezogen,

$$\overset{m+1}{A} = '[1\,2^m]\,a\,b^m\,y^{2m+1}$$

$$\overset{m+2}{A} = '[1^3 2^{m-1}]\,a^3 b^{m-1} y^{2m+1}$$

$$\overset{m+3}{A} = '[1^5 2^{m-2}]\,a^5 b^{m-2} y^{2m+1}$$

$$\overset{m+4}{A} = '[1^7 2^{m-3}]\,a^7 b^{m-3} y^{2m+1}$$

. . . .

$$\overset{2m}{A} = {}'[1^{2m-1}2]\, a^{2m-1} b y^{2m+1}$$

$$\overset{2m+1}{A} = {}'[1^{2m+1}]\, a^{2m+1} y^{2m+1} + {}'[2^{2m+1}]\, b^{2m+1} y^{2m+1}$$

8) Es ist aber

$$'[12^m] = \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \times 1} \cdot 2m+1 = \pm 2m+1$$

$$'[1^3 2^{m-1}] = \mp \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2m+1$$

$$= \mp \frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2m+1$$

$$'[1^5 2^{m-2}] = \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 2m+1$$

$$= \pm \frac{m \cdot m^2-1 \cdot m+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 2m+1$$

$$'[1^7 2^{m-3}] = \mp \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-3 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 2m+1$$

$$= \mp \frac{m \cdot m^2-1 \cdot m^2-4 \cdot m+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 2m+1$$

. . . .

$$[1^{2m-1}2] = - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 2m-1}{1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 2m-1} \cdot 2m+1$$

$$= - \frac{m \cdot m^2-1 \cdot m^2-4 \cdot m^2-9 \ldots m^2-\overline{m-2}^2 \cdot 2m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2m-1} \cdot 2m+1$$

$$'[1^{2m+1}] = + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 2m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 2m+1} \cdot 2m+1 = +1$$

$$'[2^{2m+1}] = + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 2m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 2m+1} \cdot 2m+1 = +1$$

9) Werden diese Werthe gehörig substituirt, so erhält man die gesuchte Gleichung

$$x^{2m+1} - (2m+1)\,ab^m p x^m$$

$$- \frac{m \,.\, m+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 2m+1 \,.\, a^3 b^{m-1} p x^{m-1}$$

$$- \frac{m \,.\, m^2-1 \,.\, m+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \,.\, 2m+1 \,.\, a^5 b^{m-2} p x^{m-2}$$

$$- \frac{m \,.\, m^2-1 \,.\, m^2-4 \,.\, m+3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7} \,.\, 2m+1 \,.\, a^7 b^{m-3} p x^{m-3}$$

$$- \frac{m \,.\, m^2-1 \,.\, m^2-4 \,.\, m^2-9 \,.\, m+4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9} \,.\, 2m+1 \,.\, a^9 b^{m-4} p x^{m-4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \frac{m \,.\, m^2-1 \,.\, m^2-4 \,.\, m^2-9 \ldots m^2-\overline{m-2}^2 \,.\, 2m-1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots \,.\, 2m-1} \,.\, 2m+1 \,.\, a^{2m-1} bpx$$

$$- a^{2m+1} p - b^{2m+1} p^2 = 0.$$

§ 113.

Sind umgekehrt Gleichungen von der Form in 6 und 9 des vor. §'s gegeben, so lassen sich jedesmal die Wurzeln derselben finden. Ich will des Beyspiels und Gebrauchs wegen einige solche Gleichungen hersetzen.

I. Für $m = 2$ erhält man aus 9 des vor. §'s die Gleichung

$$x^5 - 5ab^2px^2 - 5a^3bpx - a^5p - b^5p^2 = 0$$

und eine jede ihrer Wurzeln

$$\alpha a \sqrt[5]{p} + \alpha^2 b \sqrt[5]{p^2}$$

wenn α eine Wurzel der Gleichung $x^5 - 1 = 0$ ist. Diese Gleichung ist übrigens die nämliche als die, welche in I. §110 aus der allgemeinen Gleichung des fünften Grades in § 109 abgeleitet worden.

II. Für $m = 3$ erhält man aus 6 des vor. §'s die Gleichung

$$x^6 - 2b^3px^3 - 9a^2b^2px^2 - 6a^4bpx - a^6p + b^6p^2 = 0$$

deren Wurzeln durch

$$\alpha a\sqrt[6]{p} + \alpha b\sqrt[6]{p^2}$$

ausgedrückt werden, wenn α eine Wurzel der Gleichung $x^6 - 1 = 0$ bezeichnet.

Für den nämlichen Werth von m erhält man ferner aus 9 des vor. §'s die Gleichung

$$x^7 - 7ab^3px^3 - 14a^3b^2px^2 - 7a^5bpx$$
$$- a^7p - b^7p^2 = 0$$

und eine jede ihrer Wurzeln

$$\alpha a\sqrt[7]{p} + \alpha^2 b\sqrt[7]{p^2}$$

wenn α eine Wurzel der Gleichung $x^7 - 1 = 0$ bezeichnet.

III. Für $m = 4$ erhält man aus 6 des vor. §'s die Gleichung

$$x^8 - 2b^4px^4 - 16a^2b^3px^3 - 20a^4b^2px^2$$
$$- 8a^6bpx - a^8p + b^8p^2 = 0$$

und für jede ihrer Wurzeln

$$\alpha a\sqrt[8]{p} + \alpha^2 b\sqrt[8]{p^2}$$

Für eben den Werth von m erhält man ferner aus 9 die Gleichung

$$x^9 - 9ab^4px^4 - 30a^3b^3px^3 - 27a^5b^2px^2$$
$$- 9a^7bpx - a^9p - b^9p^2 = 0$$

und für jede ihrer Wurzeln

$$\alpha a\sqrt[9]{p} + \alpha^2 b\sqrt[9]{p^2}$$

u. s. w.

§ 114.

Aufg. Die Gleichung $x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^{n-1}}$ rational zu machen.

Aufl. 1) Bezeichnet man durch α, β, γ, δ, ꝛc. die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, so sind die Wurzeln der gesuchten rationalen Gleichung

$$\alpha a \sqrt[n]{p} + \alpha^{n-1} b \sqrt[n]{p^{n-1}}$$
$$\beta a \sqrt[n]{p} + \beta^{n-1} b \sqrt[n]{p^{n-1}}$$
$$\gamma a \sqrt[n]{p} + \gamma^{n-1} b \sqrt[n]{p^{n-1}}$$
ꝛc.

oder da $\alpha^n = \beta^n = \gamma^n = ꝛc. = 1$,

$$\alpha a \sqrt[n]{p} + \alpha^{-1} b \sqrt[n]{p^{n-1}}$$
$$\beta a \sqrt[n]{p} + \beta^{-1} b \sqrt[n]{p^{n-1}}$$
$$\gamma a \sqrt[n]{p} + \gamma^{-1} b \sqrt[n]{p^{n-1}}$$
ꝛc.

Hieraus könnte man nun auf die nämliche Weise wie in § 112 diese Gleichung ableiten; die folgende, im Vorhergehenden schon oft angewandte, Methode führt jedoch kürzer zum Zweck.

2) Man bezeichne die Summe der ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Potenzen dieser Wurzeln durch S_1, S_2, S_3, ꝛc., so ist

$$S_1 = {}'[1]\, a \sqrt[n]{p} + {}'[-1]\, b \sqrt[n]{p^{n-1}}$$
$$S_2 = {}'[2]\, a^2 \sqrt[n]{p^2} + 2\,{}'[0]\, abp + {}'[-2]\, b^2p^2 \sqrt[n]{p^{-2}}$$
$$S_3 = {}'[3]\, a^3 \sqrt[n]{p^3} + 3\,{}'[1]\, a^2bp \sqrt[n]{p} + 3\,{}'[-1]\, ab^2p^2 \sqrt[n]{p^{-1}}$$
$$+ {}'[-3]\, b^3p^3 \sqrt[n]{p^{-3}}$$
$$S_4 = {}'[4]\, a^4 \sqrt[n]{p^4} + 4\,{}'[2]\, a^3bp \sqrt[n]{p^2} + 6\,{}'[0]\, a^2b^2p^2$$
$$+ 4\,{}'[-2]\, ab^3p^3 \sqrt[n]{p^{-2}} + {}'[-4]\, b^4p^4 \sqrt[n]{p^{-4}}$$
ꝛc.

3) Aus der Form dieser Werthe und aus § 95 ergiebt sich, daß die Ausdrücke S_1, S_3, S_5, ꝛc. $= 0$ werden, und daß überhaupt jeder Ausdruck $S_\mu = 0$ wird, wenn μ eine

ungerade Zahl und kleiner als n ist. Da ferner $[0] = n$, so hat man

$$S2 = \frac{2}{1} nabp$$

$$S4 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} na^2b^2p^2$$

$$S6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} na^3b^3p^3$$

$$S8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} na^4b^4p^4$$

und im Allgemeinen

$$S2\mu = \frac{2\mu}{1} \cdot \frac{2\mu-1}{2} \cdot \frac{2\mu-2 \ldots \mu+1}{3 \ldots \mu} na^\mu b^\mu p^\mu$$

so lange $2\mu < n$. Der Ausdruck Sn enthält, wenn n eine gerade Zahl ist, außer dem nicht verschwindenden Gliede

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots \frac{n}{2}+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{n}{2}} na^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}}$$

welches sich aus dem Werthe von $S2\mu$ ableiten läßt, wenn $2\mu = n$ gesetzt wird, auch noch die beyden nicht verschwindenden Glieder $[n]a^n p$, $[-n]b^n p^{n-1}$, oder $na^n p$, $nb^n p^{n-1}$. Ist hingegen n eine ungerade Zahl, so enthält der Ausdruck Sn bloß die beyden zuletzt genannten Glieder. Man hat demnach für den Fall, wenn n eine ungerade Zahl ist,

$$Sn = na^n p + nb^n p^{n-1}$$

und für den Fall, wenn n eine gerade Zahl ist,

$$Sn = \frac{n \cdot n-1 \ldots \frac{n}{2}+1}{1 \cdot 2 \ldots \frac{n}{2}} na^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} + na^n p + nb^n p^{n-1}$$

4) Aus den gefundenen Werthen von S_1, S_2, S_3, ... S_n, ist man nun im Stande, mit Hülfe der Formeln in § 9, welche zur Bestimmung der Coefficienten einer Gleichung aus den bekannten Werthen der Potenzensummen ihrer Wurzeln dienen, die Coefficienten der gesuchten rationalen Gleichung zu finden. Wird nämlich diese Gleichung durch

$$x^n + \overset{1}{A}x^{n-1} + \overset{2}{A}x^{n-2} + \overset{3}{A}x^{n-3} + \dots\dots$$

$$\dots + \overset{m}{A}x^{n-m} + \dots + \overset{n-1}{A}x + \overset{n}{A} = 0$$

vorgestellt, so erhält man nachstehende Werthe der angenommenen Coefficienten $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A}, \dots\dots, \overset{n}{A}$, wo diejenigen, deren Index ungerade ist, übergangen worden, weil sie sämmtlich (der letzte $\overset{n}{A}$ ausgenommen) = 0 werden:

$$\overset{2}{A} = -\frac{S_2}{2} = -nabp$$

$$\overset{4}{A} = -\frac{\overset{2}{A}S_2 + S_4}{4} = +\frac{n \, . \, n-3}{1 \, . \, 2} a^2b^2p^2$$

$$\overset{6}{A} = -\frac{\overset{4}{A}S_2 + \overset{2}{A}S_4 + S_6}{6} =$$

$$-\frac{n \, . \, n-4 \, . \, n-5}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} a^3b^3p^3$$

$$\overset{8}{A} = -\frac{\overset{6}{A}S_2 + \overset{4}{A}S_4 + \overset{2}{A}S_6 + S_8}{8} =$$

$$+\frac{n \, . \, n-5 \, . \, n-6 \, . \, n-7}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} a^4b^4p^4$$

2c.

Das Gesetz der Fortschreitung ist hieraus leicht zu erkennen; das allgemeine Glied ist nämlich

$$\overset{2\lambda}{A} = \pm \frac{n \, . \, n-\lambda-1 \, . \, n-\lambda-2 \, . \, . \, . \, n-2\lambda+1}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, \lambda} a^\lambda b^\lambda p^\lambda$$

Der letzte Coefficient $\overset{n}{A}$ ist für ein ungerades n

$$= -a^n p - b^n p^{n-1}$$

und für ein gerades n

$$\pm \frac{n \cdot \overline{\tfrac{n}{2}-1} \cdot \overline{\tfrac{n}{2}-2} \ldots\ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \overline{\tfrac{n}{2}-1} \cdot \tfrac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} - a^n p - b^{n-1}$$

oder kürzer $\pm\ 2a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} - a^n p - b^n p^{n-1}$
das obere Zeichen von $\pm$, wenn n von der Form 4m, und das untere Zeichen, wenn n von der Form 4m + 2 ist.

5) Werden diese Werthe in der angenommenen Gleichung substituirt, so erhält man für ein gerades n die gesuchte rationale Gleichung

$$x^n - \frac{n}{1} abpx^{n-2} + \frac{n \cdot \overline{n-3}}{1 \cdot 2} a^2b^2p^2x^{n-4}$$
$$- \frac{n \cdot \overline{n-4} \cdot \overline{n-5}}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3b^3p^3x^{n-6}$$
$$+ \frac{n \cdot \overline{n-5} \cdot \overline{n-6} \cdot \overline{n-7}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4b^4p^4x^{n-8}$$
$$- \frac{n \cdot \overline{n-6} \cdot \overline{n-7} \cdot \overline{n-8} \cdot \overline{n-9}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5b^5p^5x^{n-10}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp\ 2a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} - a^n p - b^n p^{n-1}.$$
$$= 0$$

das obere Zeichen von $\mp$ wenn n = 4m + 2, das untere wenn n = 4m. Für ein ungerades n gilt die nämliche Gleichung, nur daß man in dem letzten Gliede die Größe $2a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}}$ weglassen muß.

Beysp. I. Für n=5 ist die Gleichung

$$x^5 - 5abpx^3 + 5a^2b^2p^2x - a^5p - b^5p^4$$

und jede ihrer Wurzeln

$$\alpha a\sqrt[5]{p} + \alpha^4 b\sqrt[5]{p^4}$$

Dies ist übrigens die nämliche Gleichung, welche in II. § 110 gefunden worden; das dortige d ist hier b.

II. Für n=6 ist die Gleichung

$$x^6 - 6abpx^4 + 9a^2b^2p^2x^2 - 2a^3b^3p^3 - a^6p - b^6p^5 = 0$$

und jede ihrer Wurzeln

$$\alpha a\sqrt[6]{p} + \alpha^5 b\sqrt[6]{p^5}$$

Anmerk. Man vergleiche mit diesem § die Michelsensche Uebersetzung von Eulers Introduktion, drittes Buch S. 10 und 11. Euler findet die nämliche Gleichung, zwar auf einem kürzeren, aber doch weniger analytischen Wege; was bey ihm $\sqrt[n]{\beta}$ und α ist, ist bey mir abp und $a^np + b^np^{n-1}$. Man vergleiche auch damit v. Huguenin's mathematische Beyträge zur weiteren Ausbildung angehender Geometer, S. 181 u. f.

Setzt man

$$nabp = A,\; a^np + b^np^{n-1} = T$$

so verwandelt sich die obige allgemeine Gleichung, wenn n eine ungerade Zahl ist, in

$$x^n - Ax^{n-2} + \frac{n \cdot n-3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{A^2}{n^2} x^{n-4} -$$

$$\frac{n \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{A^3}{n^3} x^{n-6} + \ldots = T$$

den ersten Theil dieser Gleichung so weit fortgesetzt, bis man auf einen Coefficienten kommt, der = 0 wird. Aus den beyden Gleichungen $nabp = A$, $a^np + b^np^{n-1} = T$ erhält man aber

$$(a^n p - b^n p^{n-1})^2 = (a^n p + b^n p^{n-1})^2 - 4a^n b^n p^n$$
$$= T^2 - \frac{4A^n}{n^n}$$

also

$$a^n p - b^n p^{n-1} = \sqrt{(T^2 - \frac{4A^n}{n^n})}$$

Verbindet man diese Gleichung mit der $a^n p + b^n p^{n-1} = T$, so erhält man durch die Addition und Subtraktion

$$a^n p = \tfrac{1}{2}T + \tfrac{1}{2}\sqrt{(T^2 - \frac{4A^n}{n^n})}$$

$$b^n p^{n-1} = \tfrac{1}{2}T - \tfrac{1}{2}\sqrt{(T^2 - \frac{4A^n}{n^n})}$$

und wenn man die nten Wurzeln ausziehet

$$a\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{[\tfrac{1}{2}T + \tfrac{1}{2}\sqrt{(T^2 - \frac{4A^n}{n^n})}]}$$

$$b\sqrt[n]{p^{n-1}} = \sqrt[n]{[\tfrac{1}{2}T - \tfrac{1}{2}\sqrt{(T^2 - \frac{4A^n}{n^n})}]}$$

Es ist also

$$\alpha\sqrt[n]{[\tfrac{1}{2}T + \tfrac{1}{2}\sqrt{(T^2 - \frac{4A^n}{n^n})}]} + \frac{1}{\alpha}\sqrt[n]{[\tfrac{1}{2}T - \tfrac{1}{2}\sqrt{(T^2 - \frac{4A^n}{n^n})}]}$$

der allgemeine Ausdruck einer jeden Wurzel der obigen Gleichung $x^n - Ax^{n-2} + \text{ꝛc.} = 0$.

Aus der Aehnlichkeit dieser Formel mit der Cardanischen ergiebt sich, daß jene Moivresche Gleichung nur eine Erweiterung der Cardanischen ist, und daß beyde auf einerley Art abgeleitet werden können, wie in den beyden angeführten Schriften wirklich gezeigt wird.

§ 115.

Aufg. Die Gleichung $x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^{n-2}}$ in dem Falle, wo n eine ungerade, nicht durch 3 theilbare Zahl ist, rational zu machen.

Aufl. 1) Es sey

$$x^n - \overset{1}{A}x^{n-1} + \overset{2}{A}x^{n-2} + \overset{3}{A}x^{n-3} + \ldots - \overset{n}{A} = 0$$

die gesuchte Gleichung, deren Wurzeln also seyn werden

$$\alpha a \sqrt[n]{p} + \alpha^{n-2} b \sqrt[n]{p^{n-2}}, \text{ oder } a\alpha \sqrt[n]{p} + \frac{1}{\alpha^2} bp \sqrt[n]{\frac{1}{p^2}}$$

$$\beta a \sqrt[n]{p} + \beta^{n-2} b \sqrt[n]{p^{n-2}}, \text{ oder } \beta a \sqrt[n]{p} + \frac{1}{\beta^2} bp \sqrt[n]{\frac{1}{p^2}}$$

rc. rc.

Es sollen ferner die Zeichen $S1$, $S2$, $S3$, rc. in Beziehung auf diese Wurzeln die nämliche Bedeutung haben, wie im vor. §.

2) Irgend eine unbestimmte Potenz k der ersten der genannten Wurzeln enthält, wenn bloß auf α gesehen wird, nachstehende Glieder

$$\alpha^k, \alpha^{k-3}, \alpha^{k-6}, \alpha^{k-9}, \ldots \alpha^{-(2k-3)}, \alpha^{-2k}$$

die nämlichen Glieder enthält auch die Potenz k der zweyten Wurzel in Hinsicht auf β, u. s. w. Es bestehet daher Sk, wenn bloß auf α, β, γ, rc. gesehen wird, aus den folgenden Gliedern:

$$'[k], '[k-3], '[k-6], \ldots '[-2k+3], '[-2k]$$

3) Ist nun $k < n$, so kann es unter diesen keine andere Summenausdrücke als $'[0]$ und $'[-n]$ geben, deren Wurzelexponenten durch n theilbar seyen; und zwar kommt der erste nur dann vor, wenn k durch 3 theilbar, der zweyte aber nur dann, wenn $2k - n$ durch 3 theilbar und zugleich positiv ist. Sie können sich aber nie beyde zugleich in demselben Summenausdrucke finden, weil sonst, der Voraussetzung entgegen, n durch 3 theilbar seyn müßte. Hieraus folgt unmittelbar, daß 1) wenn $'[0]$ in Sk vorkommen soll, k von der Form 3μ seyn müsse; daß ferner 2) wenn $'[-n]$ in Sk vorkommen soll, der kleinste Werth, welchen k erhalten kann, $\frac{n+3}{2}$ ist,

wofür ich m setzen will; und daß alsdann 5) jeder andere Werth des k die Form $m + 3\nu$ haben müsse. Es verschwindet daher immer Sk, wenn nicht k eine von den beyden Formen 3μ und $m + 3\nu$ hat.

4) Sucht man nun die Binomialcoefficienten von $'[o]$ und $'[-n]$ auf, so erhält man, wenn für diese Summenausdrücke ihr Werth n gesetzt wird,

$$S3\mu = \frac{3\mu \,.\, 3\mu-1 \,.\, 3\mu-2 \ldots 2\mu+1}{1 \,.\; 2 \,.\; 3 \;\ldots\; \mu} na^{2\mu}b^{\mu}p^{\mu}$$

$$S\overline{m+3\nu} = \frac{m+3\nu \,.\, m+3\nu-1 \ldots m+\nu}{1 \,.\; 2 \ldots 2\nu+1} na^{2\nu+1}b^{m+\nu-1}p^{m+\nu-2}$$

Aus der ersten Formel erhält man

$$S3 = \frac{3}{1} na^2bp$$

$$S6 = \frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} na^4b^2p^2$$

$$S9 = \frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} na^6b^3p^3$$

ꝛc.

und aus der zweyten

$$Sm = \frac{m}{1} nab^{m-1}p^{m-2} = \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{n+3}{1} nab^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}}$$

$$S\overline{m+3} = \frac{m+3 \,.\, m+2 \,.\, m+1}{1 \,.\; 2 \,.\; 3} na^3b^mp^{m-1}$$

$$= \frac{1}{2^3} \,.\, \frac{n+9 \,.\, n+7 \,.\, n+5}{1 \,.\; 2 \,.\; 3} na^3b^{\frac{n+3}{2}} p^{\frac{n+1}{2}}$$

$$S\overline{m+6} = \frac{m+6 \,.\, m+5 \,.\, m+4 \,.\, m+3 \,.\, m+2}{1 \,.\; 2 \,.\; 3 \,.\; 4 \,.\; 5} na^5b^{m+1}p^m$$

$$= \frac{1}{2^5} \,.\, \frac{n+15 \,.\, n+13 \,.\, n+11 \,.\, n+9 \,.\, n+7}{1 \,.\; 2 \,.\; 3 \,.\; 4 \,.\; 5} na^5b^{\frac{n+5}{2}} b^{\frac{n+5}{2}}$$

ꝛc.

Jedes andere Sk, welches nicht hierunter begriffen ist, wird $=0$.

5) Hieraus lassen sich nun die Coefficienten der gesuchten Gleichung vermittelst der allgemeinen Formel

$$\pi\overset{\pi}{A} = \overset{\pi-1}{A}S_1 - \overset{\pi-2}{A}S_2 + \overset{\pi-3}{A}S_3 - \overset{\pi-4}{A}S_4 + \dots\dots$$
$$\dots\dots \mp \overset{1}{A}S_{\overline{\pi-1}} \pm S_\pi$$

bestimmen. Wenn man hierin successive 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. für π setzt, so wird sich bald zeigen, daß alle Coefficienten, diejenigen ausgenommen, welche unter den Formen $\overset{3\mu}{A}$, $\overset{m+3\mu}{A}$, begriffen sind, verschwinden, weil in den Produkten, woraus diese Formel zusammengesetzt ist, entweder ein Coefficient, oder ein Summenausdruck, oder auch beydes zugleich verschwindet. Ferner findet man

$$\overset{3}{A} = \frac{S_3}{3} = na^2bp$$

$$\overset{6}{A} = \frac{\overset{3}{A}S_3 - S_6}{6} = \frac{n.\overline{n-5}}{1.\ 2}a^4b^2p^2$$

$$\overset{9}{A} = \frac{\overset{6}{A}S_3 - \overset{3}{A}S_6 + S_9}{9} = \frac{n.\overline{n-7}.\overline{n-8}}{1.\ 2.\ 3}a^6b^3p^3$$

ꝛc.

$$\overset{m}{A} = \mp\frac{S_m}{m} = \mp nab^{\frac{n+1}{2}}p^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\overset{m+3}{A} = \frac{\overset{m}{A}S_3 \mp \overset{3}{A}S_m}{m+3} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{n.\overline{n-5}.\overline{n-7}}{1.\ 2.\ 3}a^3b^{\frac{n+3}{2}}p^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\overset{m+6}{A} = \frac{\overset{m+3}{A}S_3 - \overset{m}{A}S_6 \mp \overset{6}{A}S_m \pm \overset{3}{A}S_{\overline{m+3}} \mp S_{\overline{m+6}}}{m+6}$$

$$= \mp\frac{1}{2^4}\cdot\frac{n.\overline{n-7}.\overline{n-9}.\overline{n-11}.\overline{n-13}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5b^{\frac{n+5}{2}}p^{\frac{n+3}{2}}$$

die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades m.

6) Das letzte Glied $\overset{n}{A}$ kann weder in der Form $\overset{3\mu}{A}$, noch in der Form $\overset{m+3\nu}{A}$ begriffen seyn, weil sonst n durch 3 theilbar seyn müßte. Es kann aber dieses Glied sehr leicht gefuuden werden, wenn man das Produkt aller Wurzeln in 1 nimmt, welches sich hier bloß auf die Summen der Produkte aller ersten und aller zweyten Theile derselben reducirt, und daher $= a^n p + b^n p^{n-2}$ ist.

7) Substituirt man diese Werthe der Coefficienten in der angenommenen Gleichung in 1, so erhält man die gesuchte rationale Gleichung

$$x^n - \frac{n}{1} a^2 b p x^{n-3} + \frac{n \cdot n-5}{1 \cdot 2} a^4 b^2 p^2 x^{n-6}$$

$$- \frac{n \cdot n-7 \cdot n-8}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^6 b^3 p^3 x^{n-9}$$

$$+ \frac{n \cdot n-9 \cdot n-10 \cdot n-11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^8 b^4 p^4 x^{n-12}$$

$$- \frac{n \cdot n-11 \cdot n-12 \cdot n-13 \cdot n-14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{10} b^5 p^5 x^{n-15}$$

$$+ \frac{n \cdot n-13 \cdot n-14 \cdot n-15 \cdot n-16 \cdot n-17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{12} b^6 p^6 x^{n-18}$$

$$\text{2c.}$$

$$- \frac{n}{1} a b^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-3}{2}}$$

$$- \frac{1}{2^2} \cdot \frac{n \cdot n-5 \cdot n-7}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^{\frac{n+3}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-9}{2}}$$

$$- \frac{1}{2^4} \cdot \frac{n \cdot n-7 \cdot n-9 \cdot n-11 \cdot n-13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 b^{\frac{n+5}{2}} p^{\frac{n+3}{2}} x^{\frac{n-15}{2}}$$

$$- \frac{1}{2^6} \cdot \frac{n \cdot n-9 \cdot n-11 \cdot n-13 \cdot n-15 \cdot n-17 \cdot n-19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} a^7 b^{\frac{n+7}{2}} p^{\frac{n+5}{2}} x^{\frac{n-21}{2}}$$

$$\text{2c}$$

$$- a^n p - b^n p^{n-2}$$

$$= 0.$$

Die

Die beyden Reihen, welche hier vorkommen, werden so weit fortgesetzt, bis man zu negativen Exponenten von x kommt.

Beysp. I. Für $n = 5$ findet man die Gleichung

$$x^5 - 5a^2bpx^2 - 5ab^3p^2x - a^5p - b^5p^3 = 0$$

und für jede ihrer Wurzeln

$$\alpha a\sqrt[5]{p} + \alpha^3 b\sqrt[5]{p^3}$$

Setzt man $5a^2bp = B$, $5ab^3p^2 = C$, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$x^5 - Bx^2 - Cx - \frac{B^3}{25C} - \frac{C^2}{5B} = 0$$

die nämliche Gleichung, welche in I. § 110 gefunden wurde.

Beysp. II. Für $n = 7$ erhält man die Gleichung

$$x^7 - 7a^2bpx^4 - 7ab^4p^3x^2 + 7a^4b^2p^2x$$
$$- a^7p - b^7p^5 = 0$$

und jede ihrer Wurzeln

$$\alpha a\sqrt[7]{p} + \alpha^5 b\sqrt[7]{p^5}$$

Hierzu gehören alle Gleichungen des siebenten Grades von der Form

$$x^7 - 7Ax^4 - 7Bx^2 + 7A^2x - \frac{A^4}{B} - \frac{B^2}{A} = 0$$

wie man leicht finden wird, wenn man $a^2bp = A$, $ab^4p^3 = B$ setzt.

§ 116.

Auf die nämliche Weise, wie in § 112, § 114 und § 115, könnte man noch unzählige andere allgemeine Formen von auflösbaren Gleichungen aus dem Binom $\sqrt[n]{p^\mu} + \sqrt[n]{p^\nu}$ durch Wegschaffung der Wurzelgrößen ableiten. Da indessen dieser Gegenstand sonst kein Interesse hat, so werde ich mich damit

begnügen, eine Gleichung herzusetzen, welche Waring, einer der vorzüglichsten Analysten, welche England besaß, in einer Abhandlung über die allgemeine Auflösung der Gleichungen, durch die Annahme $x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^3}$ findet (Philosophical transactions for the year 1779. p. 92). Für ein ungerades n ist diese Gleichung

$$x^n - p[na^{n-3}bx^2 + \frac{n \cdot n-5}{1 \cdot 2}a^{n-6}b^2x^4 +$$

$$\frac{n \cdot n-7 \cdot n-8}{1 \cdot 1 \cdot 3}a^{n-9}b^3x^5 + \frac{n \cdot n-9 \cdot n-10 \cdot n-11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{n-12}b^4x^8$$

$$+ \frac{n \cdot n-11 \cdot n-12 \cdot n-13 \cdot u-14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}a^{n-15}b^5x^{10} + \text{etc.}]$$

$$\pm p^2 [na^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}x - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{n \cdot n-5 \cdot n-7}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+3}{2}}x^3$$

$$+ \frac{1}{2^4} \cdot \frac{n \cdot n-7 \cdot n-9 \cdot n-11 \cdot n-13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}a^{\frac{n-15}{2}}b^{\frac{n+5}{2}}x^5 -$$

$$\frac{a}{2^6}\frac{n \cdot n-9 \cdot n-11 \cdot n-13 \cdot n-15 \cdot n-17 \cdot n-19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}a^{\frac{n-21}{2}}b^{\frac{n+7}{2}}x^7 + \text{etc.}]$$

$$- a^n p - b^n p^3 = 0.$$

Der Faktor p^2 hat das Zeichen +, wenn $\frac{n-3}{4}$ eine ganze Zahl ist, in andern Fällen aber das Zeichen —.

§ 117.

Die Methode, Gleichungen vom ersten Grade rational zu machen, die wir bisher hauptsächlich zur Erfindung auflösbarer Gleichungen gebraucht haben, kann auch alsdann mit Nutzen angewandt werden, wenn man bloß die Absicht hat, die unbekannten Größen, welche sich in einer Gleichung unter dem Wurzelzeichen befinden, von denselben zu befreyen. Ich will dies durch ein paar Beyspiele erläutern.

Es sey die Gleichung

$$p + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r} + \sqrt[\pi]{s} + \sqrt[\varrho]{t} \ldots\ldots = 0$$

gegeben, und p, q, r, s, ꝛc. seyen rationale Funktionen der unbekannten Größen y, z, ꝛc.: man verlangt diese Gleichung rational zu machen.

Man setze $-p = x$, so hat man die Gleichung vom ersten Grade in Beziehung auf x

$$x = \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r} + \sqrt[\pi]{s} + \sqrt[\varrho]{t} \ldots\ldots$$

Diese suche man rational zu machen, und setze hierauf wieder $-p$ für x, so hat man die gesuchte von Wurzelgrößen befreyte Gleichung.

Wäre die Gleichung

$$\sqrt[\mu]{p} + \sqrt[\nu]{q} + \sqrt[\pi]{r} + \sqrt[\varrho]{s} \ldots\ldots = 0$$

gegeben, worin sich gar kein rationales Glied befindet, so setze man $-\sqrt[\mu]{p} = x$, und mache hierauf die Gleichung $x = \sqrt[\nu]{q} + \sqrt[\pi]{r} + \sqrt[\varrho]{s} + \ldots\ldots$ rational. Ist dies geschehen, so setze man in der gefundenen Gleichung für x nach einander seine Werthe $-\alpha\sqrt[\mu]{p}$, $-\beta\sqrt[\mu]{p}$, $-\gamma\sqrt[\mu]{p}$, ꝛc., so entstehen μ Gleichungen. Werden hierauf diese mit einander multiplicirt, so erhält man die gesuchte von Wurzelgrößen befreyte Gleichung.

Ueber die Wegschaffung der Wurzelgrößen aus den Gleichungen findet man eine sehr lesenswerthe Abhandlung von Fischer im Hindenburgischen Archiv für Mathematik, Heft VIII, mit der, dem Verfasser eigenen, Deutlichkeit und Klarheit geschrieben.

Die rationale Gleichung, welche aus der Gleichung $x = \sqrt[\mu]{p} + \sqrt[\nu]{q} + \sqrt[\pi]{r} + \sqrt[\varrho]{s} + \ldots$ erhalten wird, steigt

im Allgemeinen, und so lange die Wurzelgrößen $\sqrt[\mu]{p}$, $\sqrt[\nu]{q}$, $\sqrt[\pi]{r}$, $\sqrt[\varrho]{s}$, rc. keine besondere Beziehung unter einander haben, immer auf den Grad $\mu\nu\pi\varrho\ldots$, weil die μ Werthe von $\sqrt[\mu]{p}$, die ν Werthe von $\sqrt[\nu]{q}$, die π Werthe von $\sqrt[\pi]{r}$, u. s. w. gerade auf so viele verschiedene Arten mit einander kombinirt werden können. Haben aber die genannten Wurzelgrößen irgend eine Beziehung gegen einander, so daß, wenn eine oder die andere bestimmt ist, auch die übrigen entweder sämmtlich, oder nur zum Theil bestimmt sind, so ist die rationale Gleichung immer von einem niedrigern Grade. Zur Erläuterung einige Beyspiele.

Die rationale Gleichung für $x = \sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{p^2} + \sqrt[n]{p^3} + \sqrt[n]{p^4} + \ldots + \sqrt[n]{p^k}$ steigt nur auf den nten Grad, weil $\sqrt[n]{p^2} = (\sqrt[n]{p})^2$, $\sqrt[n]{p^3} = (\sqrt[n]{p})^3$, $\sqrt[n]{p^4} = (\sqrt[n]{p})^4$, rc. und daher x nicht mehr Werthe erhalten kann, als die Wurzelgröße $\sqrt[n]{p}$.

Die rationale Gleichung für $x = \sqrt[12]{p} + \sqrt[3]{p} + \sqrt[5]{q}$ steigt nur, aber auch nothwendig, auf den sechzigsten Grad, weil $\sqrt[3]{p} = (\sqrt[12]{p})^4$, und die zwölf Werthe von $\sqrt[12]{p}$ mit den fünf werthen von $\sqrt[5]{q}$ kombinirt, sechzig verschiedene Werthe für x geben.

Die rationale Gleichung für $x = \sqrt[12]{p^5} + \sqrt[9]{p^7} + \sqrt[8]{p^3} = p^{\frac{5}{12}} + p^{\frac{7}{9}} + p^{\frac{3}{8}}$ steigt nur auf den 72sten Grad. Denn bringt man die kleinen Bruchexponenten unter den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, so hat man $x = p^{\frac{30}{72}} + p^{\frac{56}{72}} + p^{\frac{27}{72}}$. Ist daher α eine Wurzel der Gleichung $y^{72} - 1 = 0$, so ist $\alpha^{30} p^{\frac{30}{72}} + \alpha^{56} p^{\frac{56}{72}} + \alpha^{27} p^{\frac{27}{72}}$ oder $\alpha^{30} \sqrt[12]{p^5} + \alpha^{56} \sqrt[9]{p^7} + \alpha^{27} \sqrt[8]{p^3}$

der ihr entsprechende Werth des x, und solcher Werthe giebt es 72.

§ 118.

Aufg. Einen Faktor zu finden, womit der gegebene irrationale Ausdruck $p + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r} + \sqrt[\pi]{s} + \ldots$ multiplicirt werden muß, wenn er rational werden soll.

Aufl. Es sollen a, b, c, d, ꝛc. die verschiedenen Werthe bezeichnen, welche dieser Ausdruck erhalten kann, wenn man die Wurzelgrößen auf alle mögliche Arten nimmt. Macht man nun die Gleichung $x = p + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r} + \sqrt[\pi]{s} + \ldots$, so ist die daraus abgeleitete rationale Gleichung

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots = 0$$

und das letzte Glied derselben $= \pm\, a\,b\,c\,d \ldots\ldots$ Da nun dieses Produkt rational seyn muß, so folgt, daß der gegebene Ausdruck rational wird, wenn man ihn mit dem Produkte aller übrigen Ausdrücke, welche die verschiedenen Werthe desselben angeben, multiplicirt; und dieses Produkt ist daher der gesuchte Faktor.

Beysp. I. Es sey der Ausdruck $p + \sqrt[3]{q}$ gegeben. Sind alsdann 1, α, β, die drey Wurzeln der Gleichung $y^3 - 1 = 0$, so ist der gesuchte Faktor

$$= (p + \alpha\sqrt[3]{q})(p + \beta\sqrt[3]{q})$$

oder, da $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = 1$,

$$= p^2 - p\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{q^2}$$

Beysp. II. Für den Ausdruck $p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ ist der gesuchte Faktor

$$= (p+\sqrt{q}-\sqrt{r})\ (p-\sqrt{q}+\sqrt{r})\ (p-\sqrt{q}-\sqrt{r})$$
$$= p^3 - pq - pr - (p^2 - q + r)\sqrt{q} -$$
$$(p^2 + q - r)\sqrt{r} + 2p\sqrt{qr}$$

welches auch sonst schon bekannt ist.

Beysp. III. Für den Ausdruck $p + \sqrt[3]{q} - \sqrt[4]{r}$ findet man, wenn $1, \alpha, \beta$, die Wurzeln der Gleichung $y^3 - 1 = 0$ sind, den nachstehenden Faktor:

$$(p + \sqrt[3]{q} + \sqrt[4]{r})\ (p + \alpha\sqrt[3]{q} + \sqrt[4]{r})\ (p + \beta\sqrt[3]{q} + \sqrt[4]{r})$$
$$(p + \sqrt[3]{q} + \sqrt[4]{r}.\sqrt{-1})\ (p + \alpha\sqrt[3]{q} + \sqrt[4]{r}.\sqrt{-1})$$
$$(p + \beta\sqrt[3]{q} + \sqrt[4]{r}.\sqrt{-1})\ (p + \sqrt[3]{q} - \sqrt[4]{r}.\sqrt{-1})$$
$$(p + \alpha\sqrt[3]{q} - \sqrt[4]{r}.\sqrt{-1})\ (p + \beta\sqrt[3]{q} - \sqrt[4]{r}.\sqrt{-1})$$
$$(p + \alpha\sqrt[3]{q} - \sqrt[4]{r})\ (p + \beta\sqrt[3]{q} - \sqrt[4]{r})$$

Anm. Wenn $p = 0$ ist, so läßt sich oft ein einfacherer Faktor finden, wodurch der Zweck, den gegebenen Ausdruck rational zu machen, erreicht wird. So z. B. wird der Ausdruck $\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r}$ schon rational, wenn man ihn bloß mit dem Faktor $(\sqrt[3]{q} + \alpha\sqrt[3]{r})\ (\sqrt[3]{q} + \beta\sqrt[3]{r}) = \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{qr} + \sqrt[3]{r^2}$ multiplicirt; und der Ausdruck $\sqrt{9} + \sqrt{r} + \sqrt{s}$ wird es schon durch die Multiplikation mit dem Faktor $(\sqrt{q} + \sqrt{r} - \sqrt{s})\ (\sqrt{q} - \sqrt{r} + \sqrt{s})\ (\sqrt{q} - \sqrt{r} - \sqrt{s})$. Dies findet immer dann statt, wenn die Wurzelzeiger einen gemeinschaftlichen Theiler, oder die Wurzelgrößen eine gewisse Relation unter einander haben.

Zus. Aus dem, was bisher gesagt worden, folgt, daß es jederzeit möglich ist, in einem gegebenen Bruche, durch die Multiplikation des Zählers und Nenners mit einem schicklichen Faktor die Wurzelgrößen aus dem Nenner wegzuschaffen. Es läßt sich also auch eine Gleichung von der Form

$x = \frac{p + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r} + \sqrt[\pi]{s} + \ldots}{p' + \sqrt[\mu']{q'} + \sqrt[\nu']{r'} + \sqrt[\pi']{s'} + \ldots}$ jederzeit auf eine Gleichung von der Form $x = p + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r} + \sqrt[\pi]{s} + \ldots$ bringen, und da eine solche nach dem Vorhergehenden immer rational gemacht werden kann, so läßt sich auch jene immer rational machen.

§ 119.

Aufg. Die Gleichung $x = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ rational zu machen, wenn die Größen p und q nicht unmittelbar gegeben sind, sondern bloß angenommen wird, daß sie die Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grade $y^2 - Ay + B = 0$ seyn sollen.

Aufl. Die Werthe, welche x durch die verschiedene Bestimmung seiner Wurzelgrößen erhalten kann, sind

$$\sqrt{p} + \sqrt{q}, \quad -\sqrt{p} + \sqrt{q}$$
$$\sqrt{p} - \sqrt{q}, \quad -\sqrt{p} - \sqrt{q}$$

Die bloße Ansicht dieser Werthe giebt zu erkennen, daß wenn man p und q mit einander vertauscht, in denselben weiter keine Veränderung entstehet, als daß etwa der eine in den andern übergehet. Es kann folglich auch in der aus $x = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ abgeleiteten rationalen Gleichung keine Veränderung vorgehen, wenn man p mit q vertauscht, und sie muß daher nothwendig eine symmetrische Funktion dieser Größen seyn, und sich mithin durch die Coefficienten A, B, rational ausdrücken lassen. Eliminirt man daher p und q vermittelst der gegebenen Coefficienten A, B, so erhält man die gesuchte rationale Gleichnng.

Aus $x = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ erhält man aber die Gleichung (§ 97.)

$$x^4 - 2(p+q)x^2 + (p-q)^2 = 0$$

oder

$$x^4 - 2(p+q)x^2 + (p+q)^2 - 4pq = 0$$

Setzt man hierin für $p + q$ und pq ihre Werthe A und B, so erhält man die gesuchte Gleichung

$$x^4 - 2Ax^2 + A^2 - 4B = 0$$

§ 120.

Aufg. Die Gleichung

$$x = \sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + \sqrt[n]{s} + \ldots\ldots$$

rational zu machen; wenn die m Größen p, q, r, s, ꝛc. nicht unmittelbar gegeben sind, sondern bloß angenommen wird, daß sie sämmtlich die Wurzeln einer gegebenen Gleichung vom $m$ten Grade

$$y^m - Ay^{m-1} + By^{m-2} - Cy^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

seyn sollen.

Aufl. Wenn man alle mögliche Werthe des x sucht, welche aus den verschiedenen Combinationen der Wurzelwerthe entstehen, und hierauf in denselben die Größen p, q, r, s, ꝛc. auf irgend eine beliebige, aber doch in allen Werthen auf dieselbe Weise mit einander vertauscht, so wird daraus weiter nichts erfolgen, als daß diese Werthe entweder gar keine Veränderung leiden, oder bloß der eine in den andern übergehen wird. Denn es seyen α, β, γ, δ, ꝛc. die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, und $\alpha\sqrt[n]{p} + \beta\sqrt[n]{q} + \gamma\sqrt[n]{r} + \delta\sqrt[n]{s} + \text{ꝛc.}$ sey irgend ein Werth des x. Wäre es nun möglich, daß aus diesem Ausdrucke durch irgend eine Vertauschung der Größen p, q, r, s, ꝛc., z. B. durch die von p mit q, ein anderer Ausdruck $\alpha\sqrt[n]{q} + \beta\sqrt[n]{p} + \gamma\sqrt[n]{r} + \delta\sqrt[n]{s} + \text{ꝛc.}$ erzeugt würde, der nicht zu den Werthen von x gehörte, so

müßte es, wider die Voraussetzung, eine Combination der Wurzelwerthe geben, die nicht unter den Werthen des x begriffen wäre. Da also die Werthe des x unverändert bleiben, wie man auch die Größen p, q, r, s, ꝛc. unter einander vertauschen mag, so muß die aus $x = \sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + \sqrt[n]{s} +$ ꝛc. abgeleitete rationale Gleichung eine symmetrische Funktion dieser Größen seyn, und sich daher durch die Coefficienten A, B, C, ꝛc. der gegebenen Gleichung rational ausdrücken lassen. Eliminirt man daher die Größen p, q, r, s, ꝛc. vermittelst dieser Coefficienten, so erhält man die gesuchte Gleichung.

Zus. Die Gleichung, welche man unter der Bedingung der Aufgabe erhält, ist also immer von dem nämlichen Grade, als die Gleichung, welche man aus $x = \sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + \sqrt[n]{s} +$ ꝛc. ableiten würde, wenn die Größen p, q, r, s, ꝛc. von einander unabhängig wären. In dem letzteren Falle ist aber die rationale Gleichung von dem Grade $n\,n\,n\,n \ldots = n^m$, wenn m die Anzahl der Größen p, q, r, s, ꝛc. bezeichnet (§ 117), also auch in dem ersteren.

§ 121.

Lehrsatz. Die rationale Gleichung für

$$x = \sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + \sqrt[n]{s} + \text{ꝛc.}$$

kann in dem Falle, da die m Größen p, q, r, s, ꝛc. entweder völlig unabhängig von einander, oder die Wurzeln einer Gleichung vom mten Grade sind, nur solche Potenzen von x enthalten, deren Exponenten durch n theilbar sind.

Bew. Es sey

$$x^k + \overset{1}{A}x^{k-1} + \overset{2}{A}x^{k-2} + \ldots\ldots + \overset{\mu}{A}x^{k-\mu} + \ldots = 0$$

die Gleichung, welche aus der Multiplikation aller möglichen partikulären Gleichungen von der Form

$$x - \alpha\sqrt[n]{p} - \beta\sqrt[n]{q} - \gamma\sqrt[n]{r} - \delta\sqrt[n]{s} - \ldots\ldots = 0$$

entspringt, wo α, β, γ, δ, ꝛc. die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ bezeichnen: so ist klar, daß der unbestimmte Coefficient $\overset{\mu}{A}$ keine andere Summenausdrücke dieser Wurzeln enthalten kann, als solche, worin die Summe der Wurzelexponenten $= \mu$. Da nun diese immer verschwinden, wenn nicht μ durch n theilbar ist (§ 95. 2), so muß auch das Glied $\overset{\mu}{A}x^{k-\mu}$ alsdann immer verschwinden. Wenn aber μ nicht durch n theilbar ist, so kann auch $k - \mu$ nicht durch n theilbar seyn, weil $k = n^m$ ist; es werden folglich alle diejenigen Glieder verschwinden, in welchen $k - \mu$, d. h. der Exponent von x nicht durch n theilbar ist. Es wird daher die rationale Gleichung nur solche Glieder enthalten, in welchen der Exponent von x durch n theilbar ist. W. Z. E. W.

§ 122.

Aufg. Es seyen die m Größen y, z, t, u, ꝛc. durch die m Gleichungen

$$y^{\mu} + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$z^{\nu} + A'z^{\nu-1} + B'z^{\nu-2} + C'z^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$t^{\pi} + A''t^{\pi-1} + B''t^{\pi-2} + C''t^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
ꝛc.

gegeben, also irrational: man soll die Gleichung

$$x = y + z + t + u + \text{ꝛc.}$$

rational machen.

Aufl. Da y durch eine Gleichung vom Grade μ, z durch eine Gleichung vom Grade ν, u. s. w. gegeben ist, so hat man μ Werthe für y, ν Werthe für z, u. s. w. Verbindet man

alle diese Werthe, auf so viele Arten als es sich thun läßt, zur Summe $y + z + t + u +$ ꝛc., so findet man die sämmtlichen Werthe des x, und mithin durch die Multiplikation aller partikulären Gleichungen von der Form $x - (y + z + t + u +$ ꝛc.$) = 0$ die gesuchte Gleichung, die nothwendig von dem Grade $\mu\nu\pi\ldots$ seyn wird, weil sich auf so viele Arten die verschiedenen Werthe von y, z, t, u, ꝛc. kombiniren lassen. Ich behaupte nun, daß diese Gleichung in Hinsicht auf die verschiedenen Werthe des y, welche y', y'', y''', ꝛc. seyn mögen, symmetrisch seyn werde. Denn da die Werthe des x bey der Vertauschung dieser Größen weiter keine Aenderung leiden, als daß bloß der eine in den andern übergehet, so muß auch die Gleichung selbst so beschaffen seyn, daß sie bei der Vertauschung der Größen y', y'', y''', ꝛc. keine Aenderung leidet. Es lassen sich daher die Größen y', y'', y''', ꝛc. vermittelst der Coefficienten A, B, C, ꝛc. eliminiren. Das, was hier von y und seinen Werthen y', y'', y''', ꝛc. gesagt worden, läßt sich auch von z, t, ꝛc. und ihren Werthen z', z'', z''', ꝛc., t', t'', t''', ꝛc. ꝛc. sagen, und es lassen sich daher auch diese Größen vermittelst der Coefficienten A', B', C', ꝛc. A'', B'', C'', ꝛc. ꝛc. wegschaffen. Auf diese Weise erhält man also eine rationale Gleichung für x, welche nur bekannte Größen enthält, und diese ist die gesuchte Gleichung.

Beysp. Es sey $x = y + z$; die Größen y und z seyen durch die beyden Gleichungen

$$y^3 - Ay^2 + By - C = 0$$

$$z^2 - A'z + B' = 0$$

gegeben, und es werde die rationale Gleichung für x gesucht.

Die verschiedenen Werthe des x sind

$$y' + z',\quad y' + z''$$

$$y'' + z',\quad y'' + z''$$

$$y''' + z',\quad y''' + z''$$

Man bezeichne die Summe der ersten, zweyten, dritten u. s. w. Potenz dieser Werthe durch S_1, S_2, S_3, ꝛc.; so hat man

$$S_1 = 2(y' + y'' + y''') + 3(z' + z'') = 2A + 3A'$$

$$S_2 = 2(y'^2 + y''^2 + y'''^2) + 2(y' + y'' + y''')(z' + z'') + 3(z'^2 + z''^2)$$

$$= 2(A^2 - 2B) + 2AA' + 3(A'^2 - 2B')$$

$$S_3 = 2(y'^3 + y''^3 + y'''^3) + 3(y'^2 + y''^2 + y'''^2)(z' + z'') + 3(y' + y'' + y''')(z'^2 + z''^2) + 3(z'^3 + z''^3)$$

$$= 2(A^3 - 3AB + 3C) + 3(A^2 - 2B)A' + 3A(A'^2 - 2B') + (3A'^3 - 3A'B')$$

ꝛc.

Hat man so die Werthe von S_1, S_2, S_3, ꝛc. berechnet, so erhält man, wenn die gesuchte Gleichung durch

$$x^6 - \overset{1}{A}x^5 + \overset{2}{A}x^4 - \overset{3}{A}x^3 + \overset{4}{A}x^2 - \overset{5}{A}x + \overset{6}{A} = 0$$

vorgestellt wird, die Coefficienten derselben, vermittelst der Gleichungen

$$\overset{1}{A} = S_1$$

$$\overset{2}{A} = \frac{\overset{1}{A}S_1 - S_2}{2}$$

ꝛc.

§ 123.

Aufg. Es bezeichne f: (y) (z) (t) (u) . . . irgend eine rationale Funktion der Größen y, z, t, u, ꝛc. welche durch eben so viele Gleichungen

$$y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + ꝛc. = 0$$

$$z^\nu + Bz^{\nu-1} + Bz^{\nu-2} + Cz^{\nu-3} + ꝛc. = 0$$

$$t^\pi + At^{\pi-1} + Bt^{\pi-2} + Ct^{\pi-3} + ꝛc. = 0$$

gegeben sind: man soll eine Gleichung für die Werthe dieser Funktion finden.

Aufl. Man setze $x = f:(y)(z)(t)(u)\ldots$, suche alle mögliche Werthe dieser Funktion, und formire aus denselben die Gleichung für x: eliminire hierauf die Werthe y', y'', y''', 2c. von y, vermittelst der Coefficienten A, B, C, 2c., derjenigen Gleichung, wodurch diese Größe gegeben ist; welches sich immer thun läßt, weil die Gleichung für x nothwendig eine symmetrische Funktion jener Größen y', y'', y''', 2c., seyn muß. Auf eine ähnliche Art, wie mit y, verfahre man auch mit z, t, u, 2c., so erhält man eine Gleichung für x, deren Coefficienten sämmtlich bekannt sind; und diese ist die gesuchte Gleichung.

Zus. Um die sämmtlichen Werthe von x zu finden, muß man die μ Werthe von y, die ν Werthe von z, u. s. w. auf alle mögliche Arten in der Funktion $f:(y)(z)(t)(u)\ldots$ mit einander combiniren. Es ist aber klar, daß die Anzahl dieser Combinationen $= \mu\nu\pi\ldots$; also giebt auch dieses Produkt die Zahl der Werthe des x, und daher den Grad der transformirten Gleichung an.

Enthält die Funktion bloß die Größe y, oder ist $x = f:(y)$, so steigt die Gleichung für y nur auf den Grad μ, d. h. die transformirte Gleichung ist in diesem Falle von eben dem Grade, als die Gleichung, wodurch y gegeben ist.

§ 124.

Aufg. Die unbekannte Größe x ist durch die Gleichung vom $n$ten Grade

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \text{2c.} = 0$$

gegeben: die Coefficienten P, Q, 2c. sind aber nicht unmittelbar gegeben, sondern es wird bloß angenommen, daß sie sämmtlich bekannte Funktionen einer Größe y seyn, die von einer Gleichung des $n$ten Grades

$$y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + \text{etc.} = 0$$

abhängt: man soll eine Gleichung für x finden, welche bloß bekannte Größen enthält.

Aufl. Man bezeichne die Wurzeln der Gleichung $y^\mu + Ay^{\mu-1} + \text{etc.} = 0$ durch y', y'', y''', etc., und bringe diese Werthe in die Funktionen P, Q, etc. Bezeichnet man nun das, worin sich diese Funktionen verwandeln, wenn man darin nach und nach y', y'', y''', etc. für y setzt, durch P', Q', etc., P'', Q'', etc., P''', Q''', etc., etc.; so erhält man folgende μ Gleichungen, die alle zu gleicher Zeit statt haben müssen:

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$
$$x^n + P''x^{n-1} + Q''x^{n-2} + R''x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$
$$x^n + P'''x^{n-1} + Q'''x^{n-2} + R'''x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$
$$\text{etc.}$$

Das Produkt derselben giebt daher die gesuchte Gleichung.

Da aber diese Gleichungen so beschaffen sind, daß bey der Vertauschung der Größen y', y'', y''', etc. unter einander weiter keine Aenderung entstehet, als daß bloß die eine in die andere übergehet, so muß das Produkt derselben bey solchen Vertauschungen unverändert bleiben, und daher in Beziehung auf y', y'', y''', etc. symmetrisch seyn. Es lassen sich also diese Größen mit Hülfe der gegebenen Coefficienten A, B, C, etc. jedesmal wegschaffen.

Zus. Es läßt sich aber auch umgekehrt jede Gleichung vom Grade $n\mu$, welche so angesehen werden kann, als wäre sie durch die Elimination des y aus den beyden Gleichungen $x^n + Px^{n-1} + \text{etc.} = 0$, $y^\mu + Ay^{\mu-1} + \text{etc.} = 0$ entstanden, jedesmal auflösen, wenn die Auflösung der Gleichungen von den Graden n und μ vorausgesetzt wird; denn die zweyte Gleichung giebt den Werth von y, und wenn man diesen Werth in die erste Gleichung setzt, so giebt diese den Werth von x.

§ 125.

Aufg. Die unbekannte Größe x ist durch die Gleichung vom nten Grade

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \text{rc.} = 0$$

gegeben; es wird angenommen, daß die Coefficienten P, Q, R, rc. Funktionen der Größen y, z, t, u, rc., und diese Größen durch die Gleichungen

$$y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + \text{rc.} = 0$$

$$z^\nu + A'z^{\nu-1} + B'z^{\nu-2} + C'z^{\nu-3} + \text{rc.} = 0$$

$$t^\pi + A''t^{\pi-1} + B''t^{\pi-2} + C''t^{\pi-3} + \text{rc.} = 0$$

rc.

gegeben seyn: man soll eine Gleichung für x finden, welche bloß bekannte Größen enthält.

Aufl. Man betrachte zuerst P, Q, R, rc. als bloße Funktionen von y, und eliminire diese Größe nach der Anweisung des vor. §'s, so erhält man eine Gleichung für x vom Grade $n\mu$, welche nur noch die unbekannten Größen z, t, u, rc. enthält. Auf die nämliche Weise eliminire man nun auch successive die Größen z, t, u, rc., so wird man am Ende eine Gleichung vom Grade $n\mu\nu\pi\ldots$ erhalten, welche bloß x, und die bekannten Größen A, B, C, rc. A', B', C', rc., A'', B'', C'', rc. rc. enthält, und daher die gesuchte Gleichung seyn wird.

VI. Allgemeine Untersuchungen über die Umformung der Gleichungen.

§ 126.

Am Ende des vierten Capitels wurde im Vorbeygehen von der Umformung der Gleichungen und von der Tschirnhausenschen Methode gesprochen, und ihre Anwendung auf die Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades gezeigt. Hier ist nun der Ort, einige tiefere Untersuchungen darüber anzustellen, um zu sehen, was sich etwa von dieser Methode bey der Anwendung auf Gleichungen von höheren Graden erwarten lasse.

§ 127.

Aufg. Es sey

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

die gegebene, und

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + kx + l = y$$

die Hülfsgleichung; also die umgeformte Gleichung für y vom nten Grade (§. 80); sie sey

$$y^n + \mathfrak{A}y^{n-1} + \mathfrak{B}y^{n-2} + \mathfrak{C}y^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Man soll angeben, in welcher Dimension die Coefficienten a, b, c, ꝛc. der angenommenen Gleichung in den Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, vorkommen werden.

Aufl.

Aufl. Wenn x', x'', x''', ꝛc. die Wurzeln der gegebenen Gleichung bezeichnen, so hat die transformirte Gleichung $y^n + \mathfrak{A}y^{n-1} + \text{ꝛc.} = o$ die folgenden Wurzeln.

$$y' = x'^m + ax'^{m-1} + bx'^{m-2} + \ldots + kx' + l$$
$$y'' = x''^m + ax''^{m-1} + bx''^{m-2} + \ldots + kx'' + l$$
$$y''' = x'''^m + ax'''^{m-1} + bx'''^{m-2} + \ldots + kx''' + l$$

ꝛc.

Da nun die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ꝛc. die Summen der Unionen, Binionen, Ternionen, u. s. w. dieser Wurzeln sind, so läßt sich schließen, daß die Buchstaben a, b, c, ꝛc. in $\mathfrak{A}$ in der ersten Dimension, in $\mathfrak{B}$ in der zweyten, in $\mathfrak{C}$ in der dritten, und überhaupt in dem p ten Coefficienten in der pten Potenz vorkommen werden.

§ 128.

Aufg. Man soll bestimmen, von welchem Grade die Hülfsgleichung

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + kx + l = y$$

seyn müsse, wenn es möglich werden soll, die allgemeine Gleichung des nten Grades

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = o$$

in eine zweygliedrige Gleichung von der Form

$$y^n - V = o$$

umzuformen.

Aufl. In der Gleichung $y^n - V = o$ fehlen $n - 1$ Glieder; es muß also die Hülfsgleichung eben so viele unbestimmte Größen a, b, c, ꝛc. enthalten, durch deren gehörige Bestimmung es möglich wird, diese Glieder verschwinden zu machen; sie muß folglich vom $n-1$ten Grade seyn, und daher ist $m=n-1$.

§ 129.

Aufg. Um die gegebene Gleichung $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ in eine zweygliedrige Gleichung $y^3 - V = 0$ umzuformen, muß man die Hülfsgleichung $x^2 + ax + b = y$ annehmen (vor. §): man soll den Grad der Gleichungen, von welchen die Coefficienten a, b, abhängen, a priori bestimmen.

Aufl. 1) Bezeichnet man eine der beyden primitiven Wurzeln der Gleichung $y^3 - 1 = 0$ durch α und setzt man $\sqrt[3]{V} = y'$, so sind y', $\alpha y'$ $\alpha^2 y'$ die drey Wurzeln der Gleichung $y^3 - V = 0$. Jeder von den drey Wurzeln x', x'', x''', der gegebenen Gleichung korrespondirt einer von den Werthen des y; welcher? — bleibt unbestimmt.

2) Stellt man die Werthe des x mit den Werthen des y auf alle mögliche Arten zusammen, so erhält man folgende sechs Combinationen;

$$\begin{pmatrix} y', & \alpha y', & \alpha^2 y' \\ x', & x'', & x''' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y', & \alpha y', & \alpha^2 y' \\ x', & x''', & x'' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y', & \alpha y', & \alpha^2 y' \\ x'', & x', & x''' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y', & \alpha y', & \alpha^2 y' \\ x'', & x''', & x' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y', & \alpha y', & \alpha^2 y' \\ x''', & x', & x'' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y', & \alpha y', & \alpha^2 y' \\ x''', & x'', & x' \end{pmatrix}$$

3) Werden die Werthe des x und des y, die in der ersten Combination einander korrespondiren, in der Hülfsgleichung substituirt, so erhält man die drey Gleichungen

$$x'^2 + ax' + b = y'$$
$$x''^2 + ax'' + b = \alpha y'$$
$$x'''^2 + ax''' + b = \alpha^2 y'$$

und durch diese Gleichungen lassen sich die Werthe von a und b aus x', x'', x''' bestimmen. Um zuerst a zu bestimmen,

multiplicire man die zweyte Gleichung mit α, und die dritte mit α^2, und addire sie hierauf zur ersten, so erhält man, da $\alpha^4 = \alpha^3 . \alpha = \alpha$, und $1 + \alpha + \alpha^2 = [1] = 0$,

$$x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2 + a(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') = 0$$

und daher

$$a = -\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}.$$

4) Aus den fünf übrigen Combinationen in 2 lassen sich nun noch fünf andere Werthe von a finden. Hierzu braucht man aber nicht die Rechnung wieder von neuem anzufangen: denn da die gedachten Combinationen bloß darin von einander abweichen, daß die Wurzeln x', x'', x''' unter einander versetzt sind, so kann man die Versetzung in dem für a gefundenen Ausdrucke selbst vornehmen. Man erhält hierdurch folgende sechs Werthe:

$$\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}, \quad \frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

$$\frac{x''^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x'^2}{x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x'}, \quad \frac{x'''^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'^2}{x''' + \alpha x'' + \alpha^2 x'}$$

$$\frac{x'''^2 + \alpha x'^2 + \alpha^2 x''^2}{x''' + \alpha x' + \alpha^2 x''}, \quad \frac{x''^2 + \alpha x'^2 + \alpha^2 x'''^2}{x'' + \alpha x' + \alpha^2 x'''}$$

5) Es sind aber von diesen sechs Werthen nur die zwey ersten, einander gegenüber stehenden, wirklich verschieden. Denn multiplicirt man in diesen beyden Werthen sowohl die Zähler als die Nenner mit α^2, so erhält man die beyden darunter stehenden, und aus diesen wieder, durch die Multiplikation der Zähler und Nenner mit α^2, die beyden letzten.

6) Es hat also der Coefficient a nur die beyden verschiedenen Werthe

$$\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}, \quad \frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

und es hängt daher derselbe nur von einer Gleichung des zweyten Grades ab.

7) Addirt man ferner die drey Gleichungen in 3, so erhält man

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 + a(x' + x'' + x''') + 3b = 0$$

oder

$$[2] + a[1] + 3b = 0,$$

und wenn man hierin für a seine beyden Werthe substituirt, so erhält man auch für b zwey Werthe, und es hängt also auch dieser Coefficient von einer Gleichung des zweyten Grades ab.

Zus. Will man die Gleichung für a wirklich finden, so setze man, sie wäre

$$a^2 - Pa + Q = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind alsdann die beyden, welche in 6 gefunden worden, und man hat daher

$$P = \frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''} + \frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

$$= \frac{2[3] + (\alpha + \alpha^2)[12]}{[2] + (\alpha + \alpha^2)[1^2]}$$

$$Q = \frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''} \times \frac{x'^2 + \alpha x'''^2 + \alpha^2 x''^2}{x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''}$$

$$= \frac{[4] + (\alpha + \alpha^2)[2^2]}{[2] + (\alpha + \alpha^2)[1^2]}$$

Setzt man hierin für die Summenausdrücke ihre Werthe aus den angehängten Tafeln, so erhält man, da auch $\alpha + \alpha^2 = -1$,

$$P = \frac{2A^3 - 7AB + 9C}{A^2 - 3B}$$

$$Q = \frac{A^4 - 4A^2B + B^2 + 6AC}{A^2 - 3B}.$$

Substituirt man diese Werthe von P und Q in der Gleichung $a^2 - Pa + Q = 0$, so erhält man durch die Auflösung derselben die beyden Werthe von a durch die Coefficienten A, B, C der gegebenen Gleichung ausgedrückt.

Hat man aber die beyden Werthe von a gefunden, so erhält man daraus die beyden Werthe von b, vermittelst der Gleichung (7)

$$b = -\frac{[2] + a[1]}{3}$$

§ 130.

Aufg. Um die gegebene Gleichung des vierten Grades $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ auf eine Gleichung von der Form $y^4 - Vy^2 + Z = 0$ zu bringen, muß man die Hülfsgleichung $x^2 + ax + b = y$ nehmen: man soll nun den Grad der Gleichungen, von welchen die Coefficienten a, b abhängen, a priori bestimmen.

Aufl. 1) Da in der transformirten Gleichung nur gerade Potenzen von y vorkommen sollen, so müssen je zwey und zwey ihrer Wurzeln einander gleich und entgegengesetzt seyn. Bezeichnet man daher dieselben durch y', $-y'$, y'', $-y''$, und die Wurzeln der gegebenen Gleichung durch x', x'', x''', x^{IV}, so hat man, wenn diese Werthe von x und y in die Hülfsgleichung gebracht werden

$$x'^2 + ax' + b = y'$$
$$x''^2 + ax'' + b = -y'$$
$$x'''^2 + ax''' + b = y''$$
$$x^{IV2} + ax^{IV} + b = -y''$$

Addirt man die beyden ersten und die beyden letzten dieser Gleichungen, so erhält man

$$x'^2 + x''^2 + a(x' + x'') + 2b = 0$$
$$x'''^2 + x^{IV2} + a(x''' + x^{IV}) + 2b = 0$$

und hieraus

$$a = -\frac{x'^2 + x''^2 - x'''^2 - x^{IV2}}{x' + x'' - x''' - x^{IV}}$$

2) Da es gleichgültig ist, welche Werthe von x und y als zusammen gehörig betrachtet werden, so hat a nicht bloß diesen einzigen Werth, sondern alle die Werthe zugleich, welche durch alle mögliche Versetzungen der Wurzeln hervorgebracht werden können. Es gehört aber die Funktion, welche für a gefunden worden, wie man leicht sehen wird, zu derjenigen Gattung von Funktionen, für welche

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f:(x'')(x')(x''')(x^{IV}) = f:(x')(x'')(x^{IV})(x''') = f:(x''')(x^{IV})(x')(x'')$$

also zu der nämlichen Gattung, welche wir im zweyten Beyspiele § 54 untersucht haben. Es hat also diese Funktion, wie daselbst gefunden worden, nicht mehr als drey verschiedene Werthe, welche durch die Typen $f:(x')(x'')(x''')(x^{IV})$, $f:(x''')(x')(x^{IV})(x'')$, $f:(x'')(x''')(x^{IV})(x')$ gegeben sind. Setzen wir für diese Symbole das dadurch Bezeichnete, so erhalten wir folgende drey Werthe für a:

$$-\frac{x'^2 + x''^2 - x'''^2 - x^{IV2}}{x' + x'' - x''' - x^{IV}}$$

$$-\frac{x'''^2 + x'^2 - x^{IV2} - x''^2}{x''' + x' - x^{IV} - x''}$$

$$-\frac{x''^2 + x'''^2 - x^{IV2} - x'^2}{x'' + x''' - x^{IV} - x'}$$

und es hängt also der Coefficient a von einer Gleichung des dritten Grades ab.

3) Addirt man ferner die vier Gleichungen in 1, so erhält man

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{IV2} + a(x' + x'' + x''' + x^{IV}) + 4b = 0$$

oder $$[2] + a[1] + 4b = 0$$

also $$b = -\frac{[2] + a[1]}{4}$$

Da nun a drey Werthe hat, so hat auch b drey Werthe, und es hängt mithin auch b von einer Gleichung des dritten Grades ab.

Anmerk. Hieraus ließen sich nun auch, wenn es verlangt würde, nach der aus dem dritten Capitel hinlänglich bekannten Methode, die Gleichungen für a und b finden; da aber diese Sache keine Schwierigkeit hat, so werde ich mich nicht länger dabey aufhalten.

§ 131.

Aufg. Um die Gleichung des vierten Grades $x^4 - Ax^2 + Bx^2 - Cx + D = o$ auf die zweygliedrige $y^4 - V = o$ zu reduciren, muß eine Hülfsgleichung mit drey unbestimmten Größen angenommen werden, weil drey Glieder verschwinden sollen. Es sey $x^3 + ax^2 + bx + c = y$ diese Hülfsgleichung. Man soll nun finden, von welchem Grade die Gleichungen seyn werden, von denen die Coefficienten a, b, c, abhängen werden.

Aufl. 1) Die Wurzeln der Gleichung $y^4 - V = o$ sind, wenn $\sqrt[4]{V} = y'$ gesetzt wird, $y', -y', +y'\sqrt{-1}, -y'\sqrt{-1}$. Diesen Werthen von y können die Wurzeln der gegebenen Gleichung x', x'', x''', x^{IV}, auf $1 . 2 . 3 . 4 = 24$ verschiedene Arten korrespondiren, nämlich so oft, als sie sich unter einander versetzen lassen. Denn so lange dieselben unbestimmt bleiben, ist es völlig gleichgültig, welche Werthe des x und des y als zusammen gehörig angesehen werden. Man kann indessen, wie auch in den beyden vorhergehenden §en geschehen ist, die Werthe des x und des y auf irgend eine beliebige Art mit einander verbinden, und erst in den Resultaten die angegebenen Versetzungen vornehmen.

2) Die Substitution der Werthe des x und y in der Hülfsgleichung giebt

$$(\Phi)\quad \begin{array}{l} x'^3 + ax'^2 + bx' + c = \quad y' \\ x''^3 + ax''^2 + bx'' + c = -y' \\ x'''^3 + ax'''^2 + bx''' + c = \quad y'\sqrt{-1} \\ x^{IV3} + ax^{IV2} + bx^{IV} + c = -y'\sqrt{-1} \end{array}$$

3) Werden die beyden ersten und die beyden letzten Gleichungen addirt, so erhält man

$$x'^3 + x''^3 + a(x'^2 + x''^2) + b(x' + x'') + 2c = 0$$
$$x'''^3 + x^{IV3} + a(x'''^2 + x^{IV2}) + b(x''' + x^{IV}) + 2c = 0$$

und wenn diese wieder von einander abgezogen werden

$$x'^3 + x''^3 - x'''^3 - x^{IV3} + a(x'^2 + x''^2\; x'''^2 - x^{IV2})$$
$$+ b(x' + x'' - x''' - x^{IV}) = 0.$$

4) Ziehet man aber die beyden ersten und die beyden letzten der Gleichungen (φ) von einander ab, so erhält man

$$x'^3 - x''^3 + a(x'^2 - x''^2) + b(x' - x'') = 2y'$$
$$x'''^3 - x^{IV3} + a(x'''^2 - x^{IV2}) + b(x''' - x^{IV}) = 2y'\sqrt{-1}$$

und wenn man die zweyte dieser Gleichungen mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, und hierauf zur ersten addirt,

$$x'^3 - x''^3 + (x'''^3 - x^{IV3})\sqrt{-1}$$
$$+ a[x'^2 - x''^2 + (x'''^2 - x^{IV2})\sqrt{-1}]$$
$$+ b[x' - x'' + (x''' - x^{IV})\sqrt{-1}] = 0$$

5) Da diese Gleichung, so wie die in 3 gefundene, nur a und b enthält, so können sie vereinigt zur Bestimmung dieser beyden Coefficienten dienen. Eliminirt man nämlich b, und setzt man der Kürze wegen

$$\left(\begin{array}{l} (x'^3 + x''^3 - x'''^3 - x^{IV3})(x' - x'') \\ -(x'^3 - x''^3)(x' + x'' - x''' - x^{IV}) \end{array}\right) = M$$

$$\left(\begin{matrix} (x'^3+x''^3-x'''^3-x'^{v3})(x'''-x'^v) \\ -(x'''^3-x'^{v3})(x'+x''-x'''-x'^v) \end{matrix}\right) = N$$

$$\left(\begin{matrix} (x'^2+x''^2-x'''^2-x'^{v2})(x'-x'') \\ -(x'^2-x''^2)(x'+x''-x'''-x'^v) \end{matrix}\right) = P$$

$$\left(\begin{matrix} (x'^2+x''^2-x'''^2-x'^{v2})(x'''-x'^v) \\ -(x'''^2-x'^{v2})(x'+x''-x'''-x'^v) \end{matrix}\right) = Q$$

so erhält man die Gleichung

$$M+N\sqrt{-1}+(P+Q\sqrt{-1})a=0$$

und hieraus

$$a=-\frac{M+N\sqrt{-1}}{P+Q\sqrt{-1}}$$

6) Wenn man in den durch M, N, P, Q, bezeichneten Funktionen x''' für x', x'^v für x'', x'' für x''' und x' für x'^v setzt, so verwandelt sich M in $-$ N, N in M, P in $-$ Q, und Q in P. Der für a gefundene Ausdruck gehet daher durch diese Substitution in $-\frac{-N+M\sqrt{-1}}{-Q+P\sqrt{-1}}$ über, oder, wenn man Zähler und Nenner mit $-\sqrt{-1}$ multiplicirt, in $-\frac{M+N\sqrt{-1}}{P+Q\sqrt{-1}}$, d. h. er bleibt unverändert. Es gehört folglich der Ausdruck für a zu derjenigen Gattung von Funktionen, für welche

$$f:(x')(x'')(x''')(x'^v) = f:(x''')(x'^v)(x'')(x')$$

7) Aus dieser Gleichung erhält man nach § 53 folgende Periode von gleichen Typen:

$$f:(x')(x'')(x''')(x'^v)$$
$$f:(x''')(x'^v)(x'')(x')$$
$$f:(x'')(x')(x'^v)(x''')$$
$$f:(x'^v)(x''')(x')(x'')$$

Unter den $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Werthen, welche der Coefficient a durch die Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', x^{lv}, erhalten kann, giebt es also sechsmal vier gleiche Werthe, mithin nicht mehr als sechs verschiedene, welche durch nachstehende Typen angedeutet werden:

$$f : (x')\ (x'')\ (x''')\ (x^{lv})$$
$$f : (x')\ (x'')\ (x^{lv})\ (x''')$$
$$f : (x')\ (x''')\ (x'')\ (x^{lv})$$
$$f : (x')\ (x''')\ (x^{lv})\ (x'')$$
$$f : (x')\ (x^{lv})\ (x'')\ (x''')$$
$$f : (x')\ (x^{lv})\ (x''')\ (x'')$$

und durch die bloße Versetzung der drey Wurzeln x'', x''', x^{lv}, erhalten werden. Da also a sechs verschiedene Werthe hat, so hängt diese Größe von einer Gleichung des sechsten Grades ab.

8) Auf eine ähnliche Art läßt sich erweisen, daß auch b von einer Gleichung des sechsten Grades abhänge. Denn eliminirt man aus den in 3 und 4 gefundenen Gleichungen a anstatt b, so erhält man, wenn der Kürze wegen gesetzt wird,

$$\left(\begin{array}{c}(x'^3+x''^3-x'''^3-x^{lv3})(x'^2-x''^2)\\-(x'^3-x''^3)(x'^2+x''^2-x'''^2-x^{lv2})\end{array}\right) = M$$

$$\left(\begin{array}{c}(x'^3+x''^3-x'''^3-x^{lv3})(x'''^2-x^{lv2})\\-(x'''^3-x^{lv3})(x'^2+x''^2-x'''^2-x^{lv2})\end{array}\right) = N$$

$$\left(\begin{array}{c}(x'+x''-x'''-x^{lv})(x'^2-x''^2)\\-(x'-x'')(x'^2+x''^2-x'''^2-x^{lv2})\end{array}\right) = P$$

$$\left(\begin{array}{c}(x'+x''-x'''+x^{lv})(x'''^2-x^{lv2})\\-(x'''-x^{lv})(x'^2+x''^2-x'''^2-x^{lv2})\end{array}\right) = Q$$

die Gleichung

$$M + N\sqrt{-1} + b\,(P + Q\sqrt{-1}) = 0$$

und hieraus

$$b = -\frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}}$$

Vertauscht man nun die Wurzeln x', x'', x''', $x^{\prime v}$, respektive mit den Wurzeln x''', $x^{\prime v}$, x'', x', so verwandeln sich die Ausdrücke M, N, P, Q, respektive in $-N$, M, $-Q$, P, und es läßt sich daher wie in 6 zeigen, daß der für b gefundene Ausdruck von der Form $f: (x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\prime v}) = f: (x''')\,(x^{\prime v})\,(x'')\,(x')$ sey, und also nicht mehr als sechs verschiedene Werthe habe. Es hängt folglich auch b von einer Gleichung des sechsten Grades ab.

9) Werden die vier Gleichungen in 2 addirt, so erhält man

$$[3] + a[2] + b[1] + 4c = 0$$

mithin

$$c = -\frac{[3] + a[2] + b[1]}{4}$$

sind demnach die Coefficienten a und b gefunden, so hat man auch c.

10) Es hängen also die Größen a, b, von Gleichungen des sechsten Grades ab, und die in der Aufgabe geforderte Umformung wäre also nicht ausführbar, wenn sich diese Gleichungen nicht etwa auf Gleichungen des zweyten oder dritten Grades reduciren lassen sollten. Aber auch von der Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer solchen Reduktion können wir uns durch bloße Vernunftschlüsse versichern, ohne den Calkul wirklich anzustellen, wie der folgende § zeigen wird. Uebrigens muß ich nur noch erinnern, daß die Größen a und b gleichartige Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', $x^{\prime v}$, sind (§ 49), und man wird im folgenden Capitel sehen, daß in

einem solchen Falle es schon hinreichend ist, nur eine dieser beyden Größen gefunden zu haben, weil sich alsdann die andere jedesmal unmittelbar daraus herleiten läßt, ohne erst nöthig zu haben, eine neue Gleichung aufzulösen. Ich werde mich daher bloß auf die Untersuchung der Gleichung für a einschränken.

§ 132.

Aufg. Man soll finden, ob sich die Gleichung des sechsten Grades, von welcher die Größe a des vorigen §'s abhängt, auf Gleichungen eines niedrigeren Grades reduciren lasse.

Aufl. 1) Im vor. § haben wir gesehen, daß die sechs Wurzeln der Gleichung für a durch folgende Typen gegeben sind:

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}),\quad f:(x')(x'')(x^{IV})(x''')$$
$$f:(x')(x''')(x'')(x^{IV}),\quad f:(x')(x''')(x^{IV})(x'')$$
$$f:(x')(x^{IV})(x'')(x'''),\quad f:(x')(x^{IV})(x''')(x'')$$

Ich will nun annehmen, die Werthe von a, welche den beyden ersten Typen entsprechen, wären die Wurzeln einer Gleichung des zweyten Grades

$$a^2 - pa + q = 0:$$

so ist, wegen der Natur der Gleichungen,

$$p = f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) + f:(x')(x'')(x^{IV})(x''')$$
$$q = f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) \times f:(x')(x'')(x^{IV})(x''')$$

2) Aus dieser Zusammensetzung ergiebt sich aber sogleich, daß p und q Funktionen von der Form

$$\varphi:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = \varphi:(x')(x'')(x^{IV})(x''')$$

sind, weil bey der Vertauschung der Wurzeln x''', x^{IV}, $f:(x')(x'')(x''')(x^{IV})$ in $f:(x')(x'')(x^{IV})(x''')$, und um-

gekehrt die letztere in die erstere übergehet, wodurch also keine Veränderung in den Ausdrücken für p und q entstehet.

3) Nach dem vor. § ist aber die durch f bezeichnete Funktion von der Form

$$f : (x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f : (x''')(x^{IV})(x'')(x')$$

mithin sind auch p und q Funktionen von dieser Form. Es sind also p, q, Funktionen von der Form

$$\varphi : (x')(x'')(x''')(x^{IV}) = \varphi : (x''')(x^{IV})(x'')(x')$$
$$= \varphi : (x')(x'')(x^{IV})(x''')$$

und eine solche Form giebt nicht mehr als drey verschiedene Werthe, nämlich

$$\varphi : (x')(x'')(x''')(x^{IV})$$
$$\varphi : (x')(x''')(x'')(x^{IV})$$
$$\varphi : (x')(x^{IV})(x'')(x''')$$

4) Es hängen demnach die Coefficienten p und q bloß von zwey kubischen Gleichungen

$$p^3 - A'p^2 + B'p + C' = 0$$
$$q^3 - A''q^2 + B''q - C'' = 0$$

ab. Bezeichnet man daher die drey Wurzeln der ersten Gleichung durch p', p'', p''', und die drey Wurzeln der zweyten Gleichung durch q', q'', q''', so erhält man folgende drey Gleichungen des zweyten Grades:

$$a^2 - p'a + q' = 0$$
$$a^2 - p''a + q'' = 0$$
$$a^2 - p'''a + q''' = 0$$

in welche sich mithin die Gleichung des sechsten Grades für a zerlegen läßt.

Zus. Wenn man in den Ausdrücken M, N, P, Q, in 5 des vor. §'s die Wurzeln x''', x^{IV}, mit einander vertauscht, so bleiben die Ausdrücke M und P ungeändert, die Ausdrücke

N und Q hingegen gehen in $-N$, $-Q$ über. Setzt man daher

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = -\frac{M+N\sqrt{-1}}{P+Q\sqrt{-1}}$$

so ist

$$f:(x')(x'')(x^{IV})(x''') = -\frac{M-N\sqrt{-1}}{P-Q\sqrt{-1}}$$

Es ist daher

$$p = -\frac{M+N\sqrt{-1}}{P+Q\sqrt{-1}} - \frac{M-N\sqrt{-1}}{P-Q\sqrt{-1}}$$

$$q = -\frac{M+N\sqrt{-1}}{P+Q\sqrt{-1}} \times -\frac{M-N\sqrt{-1}}{P-Q\sqrt{-1}}$$

oder

$$p = -\frac{2(MP+NQ)}{P^2+Q^2}, \quad q = \frac{M^2+N^2}{P^2+Q^2}$$

Aus diesen Funktionen lassen sich nun die Gleichungen für p und q nach der im dritten Capitel gelehrten Methode wirklich finden.

§ 133.

Die Resultate in den beyden vorhergehenden §en lassen sich auch unmittelbar aus der Betrachtung der Gleichungen (Φ) in 2. § 131 herleiten. Man hätte nämlich in § 130, um die vier Werthe von x mit den vier Werthen von y auf alle mögliche Arten zu verbinden, anstatt, wie daselbst geschehen ist, eine Vertauschung der ersteren vorauszusetzen, eine Vertauschung der letzteren annehmen können. Die Gleichungen (Φ) erleiden sowohl durch die eine als durch die andere Art der Vertauschung 24 Veränderungen; und da jede solche Veränderung einen Werth von a giebt, so erhält man 24 Werthe von a, und darunter, wie wir gesehen haben, nicht mehr als sechs verschiedene.

Dieser Erfolg hätte sich aber auch, ohne den Werth von a zu kennen, a priori voraussehen lassen. Unter den 24 Verbindungen der Wurzeln x', x'', x''', $x^{\prime v}$ mit y', $-y'$, $y'\sqrt{-1}$, $-y'\sqrt{-1}$, giebt es nämlich auch folgende

$$x'^3 + ax'^2 + bx' + c = y'\sqrt{-1}$$
$$x''^3 + ax''^2 + bx'' + c = -y'\sqrt{-1}$$
$$x'''^3 + ax'''^2 + bx''' + c = -y'$$
$$x^{\prime v 3} + ax^{\prime v 2} + bx^{\prime v} + c = y'$$

und diese vier Gleichungen hätte man aus jenen in 2. § 131 erhalten können, wenn man durchgängig $y'\sqrt{-1}$ anstatt y' gesetzt hätte. Durch eine solche Substitution kann aber der Werth von a keine Aenderung leiden; denn nachdem man y' eliminirt hat, ist es völlig gleichgültig, was man dafür setzen mag. Hieraus folgt, daß diese Gleichungen den nämlichen Werth von a geben müssen, als jene; und da die ersteren aus den letzteren auch durch die Vertauschung der Wurzeln x', x'', x''', $x^{\prime v}$, mit x''', $x^{\prime v}$, x'', x', hätten erhalten werden können, so folgt, daß der Ausdruck für a so beschaffen seyn müsse, daß er durch die angegebene Vertauschung keine Veränderung leide; er muß daher nothwendig von der Form

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{\prime v}) = f:(x''')(x^{\prime v})(x'')(x')$$

seyn, welches mit 6. § 131 übereinstimmt.

Setzt man in den Gleichungen (Φ) in 2. § 131, $-\sqrt{-1}$, für $\sqrt{-1}$, so erhält man wieder eine neue Verbindung von Gleichungen, welche von den Gleichungen (Φ) nur darin verschieden sind, daß in jenen $x^{\prime v}$ mit $y\sqrt{-1}$, und x''' mit $-y'\sqrt{-1}$ verbunden ist, anstatt daß es bey diesen umgekehrt ist; man hätte sie daher auch durch eine bloße Vertauschung von x''' mit $x^{\prime v}$ erhalten können. Hieraus folgt aber, daß der Ausdruck für a so beschaffen seyn müsse, daß man $f:(x')(x'')(x^{\prime v})(x''')$ aus $f:(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})$ erhält, wenn man

bloß $-\sqrt{-1}$ für $\sqrt{-1}$ setzt, welches mit § 132. Zus. übereinstimmt.

Da ferner die Funktionen p, q, des vor §'s, als Summe und Produkt der beyden Funktionen $f:(x')(x'')(x''')(x^{IV})$, $f:(x')(x'')(x^{IV})(x''')$, durch die Substitution von $-\sqrt{-1}$ für $\sqrt{-1}$ keine Veränderung erleideu können, so können sie auch durch die Vertauschung von x''' mit x^{IV} keine Veränderung erleiden, und sie sind daher Funktionen von der Form

$$\varphi:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = \varphi:(x')(x'')(x^{IV})(x''')$$

und da sie auch Funktionen von der Form

$$\varphi:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = \varphi:(x''')(x^{IV})(x'')(x')$$

sind, weil sie aus solchen zusammengesetzt worden; so folgt, wie im vor. §, daß sie nur drey verschiedene Werthe haben können, und folglich von Gleichungen des dritten Grades abhängen.

§ 134.

Aufg. Um die Gleichung des fünften Grades

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

in eine zweygliedrige Gleichung $y^5 - V = 0$ umzuformen, wird die Hülfsgleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = y$$

angenommen: man soll finden, von welchem Grade die Gleichungen seyn werden, die man auflösen muß, um die Coefficienten a, b, c, d, zu bestimmen.

Aufl. 1) Wenn α eine der imaginären Wurzeln der Gleichung $y^5 - 1 = 0$ bezeichnet, und $\sqrt[5]{V} = y'$ gesetzt wird, so sind, wie bekannt, y', $\alpha y'$, $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y'$, $\alpha^4 y'$, die fünf Wurzeln der Gleichung $y^5 - V = 0$. Bringt man diese

Werthe des y nebst den Werthen von x in die Hülfsgleichung, so erhält man die folgenden fünf Gleichungen:

$$x'^4 + ax'^3 + bx'^2 + cx' + d = y'$$
$$x''^4 + ax''^3 + bx''^2 + cx'' + d = \alpha y'$$
$$x'''^4 + ax'''^3 + bx'''^2 + cx''' + d = \alpha^2 y'$$
$$x^{iv4} + ax^{iv3} + bx^{iv2} + cx^{iv} + d = \alpha^3 y'$$
$$x^{v4} + ax^{v3} + bx^{v2} + cx^{v} + d = \alpha^4 y'$$

2) Aus diesen Gleichungen, welche in Beziehung auf a, b, c, d, nur vom ersten Grade sind, könnte man einen jeden dieser Coefficienten durch die Wurzeln x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, ausdrücken, und hierauf, wie im Vorhergehenden bey den Gleichungen des dritten und vierten Grades geschehen ist, in den gefundenen Ausdrücken die genannten Wurzeln so oft es sich thun läßt, also hier $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ mal permutiren; die Anzahl der ungleichen Werthe, welche man dadurch erhielte, würde alsdann den Grad der Gleichungen bestimmen, von welchen die Größen a, b, c, d, abhängen. Aber nicht zu gedenken, daß die Elimination, und noch mehr die Vergleichung der 120 Resultate an sich schon sehr mühsam wäre, so würde es immer noch eine besondere Untersuchung erfordern, ob nicht die am Ende erhaltenen Gleichungen sich auf niedrigere Grade reduciren lassen. Wir wollen daher versuchen, ob sich nicht aus der Natur der obigen Gleichungen selbst solche Merkmale ergeben, wodurch wir unseren Zweck leichter erreichen können.

3) Da die Mehrheit der Werthe eines jeden der Coefficienten a, b, c, d, etwa a, (für die übrigen lassen sich die nämlichen Schlüsse machen,) bloß darin ihren Grund hat, daß die Werthe von x und y auf mehrere Arten mit einander kombinirt werden können, so kommt es allein darauf an, die

Resultate dieser verschiedenen Combinationen zu untersuchen. Man erhält aber alle mögliche Verbindungen der Werthe von x und y, wenn man in den obigen fünf Gleichungen entweder die Werthe von x, oder die Werthe von y auf alle Weise permutirt. Wählen wir die erstere Art, und lassen nach der Hindenburgischen Regel des Permutirens zuerst x' an seiner Stelle in der ersten Gleichung, indem wir die Wurzeln x'', x''', $x^{\prime IV}$, x^{V}, unter einander versetzen, so erhalten wir 24 Gruppen, jede von 5 Gleichungen. Bringen wir hierauf die Wurzeln x'', x''', $x^{\prime IV}$, x^{V}, successive in die erste Gleichung, indem wir jedesmal die vier übrigen Wurzeln unter einander permutiren, so erhalten wir in allem 120 Gruppen, jede von fünf Gleichungen, und mithin die sämmtlichen Verbindungen der Werthe von x mit den Werthen von y. Jede solche Gruppe giebt einen Werth für a; also geben alle zusammen 120 Werthe für a.

4) Ich behaupte nun, daß es unter diesen 120 Werthen von a nicht mehr als 24 verschiedene gebe, und daß diese verschiedenen Werthe aus den ersten 24 Gruppen erhalten werden. Denn es ist erstens leicht einzusehen, daß es völlig einerley ist, ob man successive die Wurzeln x'', x''', $x^{\prime IV}$, x^{V}, in die erste Gleichung bringt, und die übrigen Wurzeln permutirt, oder ob man successive in allen fünf Gleichungen $\alpha y'$, $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y'$, $\alpha^4 y'$, für y' substituirt, und nach jeder solchen Substitution die Wurzeln x'', x''', $x^{\prime IV}$, x^{V} unter einander permutirt, indem man x' an seiner Stelle in der ersten Gleichung stehen läßt. Da nun y' in dem Werthe von a nicht mehr vorhanden ist, weil dasselbe gleich Anfangs aus den obigen Gleichungen eliminirt wird, so ist es in Hinsicht auf diesen Werth völlig gleichgültig, was man für y' setzen mag, und man wird daher durch die angegebenen Substitutionen keine andere Werthe finden, als die, welche man erhält, wenn

man x' an seiner Stelle läßt, und bloß die Wurzeln x'', x''', x^{IV}, x^{V}, permutirt.

5) Wir sind nunmehr gewiß, daß der Ausdruck für a, den man durch die wirkliche Rechnung erhalten würde, so beschaffen ist, daß es unter den 120 Werthen, die aus der Versetzung aller fünf Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, entspringen, nicht mehr als 24 verschiedene giebt, und daß diese letzteren Werthe diejenigen sind, welche durch die ausschließliche Versetzung der vier Wurzeln x'', x''', x^{IV}, x^{V}, erhalten werden. Es steigt also die Gleichung für a auf keinen höheren als den 24sten Grad. Wir wollen nun sehen, ob sich diese Gleichung nicht auf andere von niedrigern Graden reduciren lasse.

6) Da wir den Ausdruck für a nicht kennen, so wollen wir die Versetzung der Wurzeln x'', x''', x^{IV}, x^{V}, unmittelbar in den obigen fünf Gleichungen vornehmen, indem wir dabey die erste völlig bey Seite setzen, weil x' als eine festgestellte Größe angesehen werden kann. Zu dem Ende lassen wir wieder nach der Hindenburgschen Versetzungsweise zuerst die Wurzel x'' an ihrer Stelle, und permutiren bloß die Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, so erhalten wir sechs Gruppen, jede von fünf Gleichungen. Setzen wir hierauf successive x''', x^{IV}, x^{V}, für x'' in der zweyten Gleichung, und permutiren nach einer jeden solchen Substitution die drey übrigen Wurzeln, so erhalten wir in allem die 24 Gruppen von Gleichungen, welche die 24 verschiedenen Werthe von a geben.

7) Anstatt des angegebenen Verfahrens könnte man sich aber auch des folgenden bedienen. Man setze zuerst in den obigen fünf Gleichungen nach und nach α^2, α^3, α^4, für α, so erhält man, da $\alpha^6 = \alpha$, $\alpha^7 = \alpha^2$, $\alpha^8 = \alpha^3$, ꝛc. nachstehende vier Verbindungen zwischen den Werthen von x und y:

x'	x''	x'''	x^{IV}	x^{V}
y'	$\alpha y'$	$\alpha^2 y'$	$\alpha^3 y'$	$\alpha^4 y'$
y'	$\alpha^2 y'$	$\alpha^4 y'$	$\alpha y'$	$\alpha^3 y'$
y'	$\alpha^3 y'$	$\alpha y'$	$\alpha^4 y'$	$\alpha^2 y'$
y'	$\alpha^4 y'$	$\alpha^3 y'$	$\alpha^2 y'$	$\alpha y'$

und wenn man nun in einer jeden dieser Verbindungen die drey Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, unter einander permutirt, so erhält man die 24 Verbindungen zwischen den Werthen von x und y, welche unter der Bedingung, daß x' mit y' verbunden bleiben soll, allein möglich sind.

8) Hat man also den Coefficienten a, aus den 5 Gleichungen in 1, durch die Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, ausgedrückt, so darf man nur, um die 24 verschiedenen Werthe desselben zu finden, α in α^2, α^3, α^4, verwandeln, und in jedem dieser vier Werthe bloß die drey Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, permutiren.

9) Nehmen wir nun an, daß die Werthe von a, welche die vier Verbindungen in 7 geben, die Wurzeln einer Gleichung des vierten Grades

$$a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$$

seyen, und bezeichnen wir diese Wurzeln durch a', a'', a''', a^{IV}, so ist

$$p = a' + a'' + a''' + a^{IV}$$
$$q = a'a'' + a'a''' + a'a^{IV} + a''a''' + \text{2c.}$$
$$\text{2c.}$$

Da nun die Funktionen a', a'', a''', a^{IV}, so beschaffen sind, daß sie bey der Vertauschung von α mit α^2, α^3, α^4, bloß in einander übergehen, so sind p, q, r, s, symmetrische Funktionen von den Wurzeln der Gleichung $y^5 - 1 = 0$, und sie können daher kein α mehr enthalten. Die Funktionen p, q, r, s, enthalten demnach weder y' noch α, und sie können da-

her bey allen Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, nicht mehr als sechs verschiedene Werthe erhalten, nämlich die, welche aus den bloßen Permutationen der Wurzeln x''', q^{IV}, x^{V}, entstehen.

10) Es hängen demnach die Coefficienten p, q, r, s, sämmtlich von Gleichungen des sechsten Grades ab, und es ließen sich auch, wenn man die Mühe nicht scheute, nach der im dritten Capitel gelehrten Methode diese Gleichungen wirklich finden. Ob sie aber einer weiteren Reduktion fähig seyn werden, oder nicht, kann erst in der Folge entschieden werden. Uebrigens muß ich nur noch bemerken, daß es schon hinreicht, eine dieser Gleichungen, z. B. die für p aufgelöst zu haben, weil sich alsdann, wie im folgenden Capitel gezeigt werden soll, die Coefficienten q, r, s, direkte finden lassen.

§ 135.

Aufg. Um die gegebene Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

in die zweygliedrige $y^n - V = 0$ umzuformen, wird die Hülfsgleichung

$$x^{n-1} + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots\ldots + kx + l = y$$

mit $n-1$ unbestimmten Coefficienten a, b, c, ... k, l, angenommen: man soll, unter der Voraussetzung, daß n eine Primzahl sey, den Grad der Gleichungen bestimmen, welche man auflösen muß, um die angenommenen Coefficienten zu finden.

Aufl. 1) Wird $\sqrt[n]{V} = y'$ gesetzt, und bezeichnet α eine imaginäre Wurzel der Gleichung $y^n - 1 = 0$, so sind y', $\alpha y'$, $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y'$, ... $\alpha^{n-1} y'$, die n Wurzeln der Glei-

chung $y^n - V = o$. Verbindet man diese Werthe mit den Wurzeln der gegebenen Gleichung, so erhält man folgende n Gleichungen:

$$x'^{n-1} + ax'^{n-2} + bx'^{n-3} + \dots + kx' + l = y'$$
$$x''^{n-1} + ax''^{n-2} + bx''^{n-3} + \dots + kx'' + l = \alpha y'$$
$$x'''^{n-1} + ax'''^{n-2} + bx'''^{n-3} + \dots + kx''' + l = \alpha^2 y'$$

u. s. w.

aus welchen man zuerst y' eliminiren, und aus den, durch diese Elimination erhaltenen $n - 1$ Gleichungen, die Werthe a, b, c, d, u. s. w., durch die Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, u. s. w. bestimmen kann.

2) Der Coefficient a (und dies, so wie alles folgende, gilt auch von b, c, d, u. s. w.) kann im Allgemeinen so viele Werthe erhalten, als sich die n Werthe von x mit den n Werthen von y zu Gruppen von n Gleichungen, wie die in 1, verbinden lassen, unter der Bedingung, daß jede solche Gruppe von den anderen in der Zusammensetzung verschieden sey. Solcher Verbindungen giebt es aber gerade so viele, als die n Wurzeln in der obigen Gruppe von n Gleichungen ihre Stellen unter einander wechseln können; folglich ist die Anzahl der Werthe, welche der Coefficient a erhalten kann, $= 1 . 2 . 3 \dots n$. Es wird daher auch die Gleichung, von welcher a abhängt, von dem Grade $1 . 2 . 3 \dots n$ seyn müssen, wenn sich nicht etwa unter diesen Werthen gleiche finden sollten.

3) Wenn man in den obigen Gleichungen successive $\alpha y'$, $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y'$, $\dots \alpha^{n-1} y'$ für y' substituirt, so erhält man n Gruppen von Gleichungen, in welchen die Werthe von x und y so zusammengestellt sind, wie folgendes Schema zeigt:

x',	x'',	x''',	x^{iv},	$x^{v}, \ldots\ldots x^{(n)}$
y',	$\alpha y'$,	$\alpha^2 y'$,	$\alpha^3 y'$,	$\alpha^4 y', \ldots\ldots \alpha^{n-1} y'$
$\alpha y'$,	$\alpha^2 y'$,	$\alpha^3 y'$,	$\alpha^4 y'$,	$\alpha^5 y', \ldots\ldots\ldots y'$
$\alpha^2 y'$,	$\alpha^3 y'$,	$\alpha^4 y'$,	$\alpha^5 y'$,	$\alpha^6 y', \ldots\ldots\ldots \alpha y'$
$\alpha^3 y'$,	$\alpha^4 y'$,	$\alpha^5 y'$,	$\alpha^6 y'$,	$\alpha^7 y', \ldots\ldots \alpha^2 y'$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$\alpha^{n-2} y'$,	$\alpha^{n-1} y'$,	y',	$\alpha y'$,	$\alpha^2 y', \ldots\ldots \alpha^{n-3} y'$
$\alpha^{n-1} y'$,	y',	$\alpha y'$,	$\alpha^2 y'$,	$\alpha^3 y', \ldots\ldots \alpha^{n-2} y'$

Hier findet sich, wie man siehet, x' immer mit einem anderen Werthe von y zusammen gestellt, indeß zu gleicher Zeit die übrigen $n - 1$ Werthe von x mit den übrigen $n - 1$ Werthen von y verbunden sind. Wenn man nun in einer jeden dieser n Verbindungen die Wurzeln $x'', x''', x^{iv} \ldots x^{(n)}$ permutirt, so erhält man immer $1 . 2 . 3 \ldots n - 1$ Verbindungen, und folglich aus allen zusammen die sämmtlichen $1 . 2 . 3 \ldots n$ Verbindungen, in welche die Werthe von x mit den Werthen von y gebracht werden können.

4) Um also die Resultate aller möglichen Verbindungen zwischen den Werthen von x und y zu finden, darf man nur in den obigen Gleichungen successive $\alpha y', \alpha^2 y', \alpha^3 y', \ldots \alpha^{n-1} y'$ für y' schreiben, hierauf die Wurzeln $x'', x''', x^{iv}, \ldots x^{(n)}$ auf alle Weise ihre Stellen wechseln lassen, und aus jeder hierdurch erhaltenen Gruppe einen Werth von a suchen; oder, welches hier das Nämliche ist, zuerst den Ausdruck für a suchen, und hierauf die angegebene Substitution und Versetzung anbringen. Da aber y' aus dem Ausdrucke für a gänzlich verschwunden ist (1), so läßt die Substitution von $\alpha y', \alpha^2 y', \alpha^3 y', \ldots\ldots \alpha^{n-1} y'$ für y' denselben ungeändert, und es giebt daher nicht mehr verschiedene Werthe desselben, als aus der Versetzung der $n-1$ Wurzeln $x'', x''', x^{iv}, \ldots\ldots x^{(n)}$ entspringen.

5) Es hängt also die Größe a von einer Gleichung des $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n-1$ ten Grades ab, und die Wurzeln derselben sind die aus der Versetzung der Wurzeln $x'', x''', \ldots x^{(n)}$ sich ergebenden Werthe des Ausdruckes dieser Größe. Hieraus läßt sich nun, nach der im dritten Capitel gelehrten Methode, diese Gleichung wirklich finden, und in lauter bekannten Größen angeben.

6) Da die ungleichen Werthe von a ausschließlich den $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1$ Gruppen zugehören, welche aus der Stellenwechselung der $n-1$ Wurzeln $x'', x''', x^{IV}, \ldots\ldots x^{(n)}$ in den obigen Gleichungen entspringen, so ist es erlaubt, die erste Gleichung nebst den darin befindlichen Wurzeln x', y', als festgestellt und unveränderlich anzusehen, und man braucht daher bloß die $n-1$ letzteren Gleichungen

$$x''^{n-1} + ax''^{n-2} + \ldots\ldots + kx'' + l = \alpha y'$$

$$x'''^{n-1} + ax'''^{n-2} + \ldots\ldots + kx''' + l = \alpha^2 y'$$

ꝛc.

in Betrachtung zu ziehen. Läßt man in diesen Gleichungen die Wurzeln $x'', x''', \ldots\ldots x^{(n)}$, ihre Stellen so oft als möglich wechseln, so erhält man alle mögliche Verbindungen zwischen diesen Wurzeln und den Wurzeln $\alpha y', \alpha^2 y', \alpha^3 y', \ldots\ldots \alpha^{n-1} y'$. Diese Verbindungen lassen sich aber auch wie folgt finden.

7) In § 86. Zus. wurde gezeigt, daß wenn man in der Reihe der Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^{n-1}$ successive $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots\ldots \alpha^{n-1}$ für α setzt, immer wieder dieselben Wurzeln, nur in einer andern Ordnung, zum Vorschein kommen. Hieraus folgt, daß, wenn man in den Gleichungen in 6 nach einander $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots\ldots \alpha^{n-1}$ für α substituirt, die daraus entstehenden $n-1$ Gruppen von Gleichungen bloß in der Verbin-

dung der Werthe von x mit den Werthen von y von einander abweichen werden. Da nun auch jede Gruppe eine andere von den Größen $\alpha y'$, $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y'$, ... $\alpha^{n-1} y'$ in der ersten Stelle hat, so folgt, daß man die sämmtlichen Verbindungen der Werthe von x mit den Werthen von y erhält, wenn man in jeder Gruppe die n—2 Wurzeln x''', x^{IV}, ... $x^{(n)}$ in den n—2 letzten Gleichungen auf alle mögliche Weise permutirt.

8) Die Veränderungen, welche man mit den Gleichungen selbst vorgenommen hat, kann man aber auch mit ihrem Resultate, dem Ausdrucke von a vornehmen. Hat man nämlich durch die Gleichungen in 1 die Größe a durch x', x'', x''', ... $x^{(n)}$ ausgedrückt, so substituire man in demselben nach einander α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} für α, und permutire in jedem der erhaltenen Werthe bloß die Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, ... $x^{(n)}$, indem man x' und x'' an ihren Stellen läßt.

9) Bezeichnen wir nun die n—1 Werthe von a, welche aus der Substitution von α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} für α entspringen, durch a', a'', a''', ... $a^{(n)}$ und nehmen wir an, daß sie die Wurzeln folgender Gleichung vom n—1 ten Grade seyen:

$$a^{n-1} - pa^{n-2} + qa^{n-3} - ra^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

so können die Coefficienten p, q, r, etc. als bloße Funktionen von a', a'', a''', ... $a^{(n-1)}$, ebenfalls nicht mehr verschiedene Werthe erhalten, als die 1 . 2 . 3 . . . . n—1, welche aus der Vertauschung von α mit α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} und aus der Versetzung der Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, ... $x^{(n)}$ entspringen. Da aber diese Coefficienten auch zugleich symmetrische Funktionen von α, α^2, α^3, ... $\alpha^{(n-1)}$, mithin von den Wurzeln der Gleichung $y^n - 1 = 0$ sind, so müssen

sie nach dem vorigen Capitel rational seyn, und können daher kein α mehr enthalten. Es haben folglich diese Coefficienten nicht mehr, als die $1 . 2 . 3 \ldots n - 2$ verschiedene Werthe, welche aus der Versetzung der Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, $\ldots x^{(n)}$ entspringen, und sie hängen daher sämmtlich von Gleichungen des $1 . 2 . 3 \ldots n - 2$ten Grades ab.

10) Es sey $1 . 2 . 3 \ldots n - 1 = \mu$ und

$$p^{\mu} + A'p^{\mu-1} + B'p^{\mu-2} + C'p^{\mu-3} + \text{rc.} = 0$$

die Gleichung für p; so lassen sich, wie aus dem driteen Capitel bekannt ist, die Coefficienten A', B', C', rc. jederzeit finden, und durch die Coefficienten A, B, C, rc. der gegebenen Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \text{rc.} = 0$ jederzeit rational ausdrücken. Könnte man alsdann diese Gleichung auflösen, und daraus die Werthe von p bestimmen, so ließen sich auch, wie im folgenden Capitel gezeigt werden wird, die Coefficienten q, r, s, rc. direkt und ohne Auflösung irgend einer andern Gleichung finden. Bezeichnet man nun die Werthe von p, q, r, rc., welche man auf diese Art findet, durch p', q', r', rc., p'', q'', r'', rc., p''', q''', r''', rc. rc., so erhält man folgende $1 . 2 . 3 \ldots n - 2$ Gleichungen:

$$a^{n-1} + p'a^{n-2} + q'a^{n-3} + r'a^{n-4} + \text{rc.} = 0$$
$$a^{n-1} + p''a^{n-2} + q''a^{n-3} + r''a^{n-4} + \text{rc.} = 0$$
$$a^{n-1} + p'''a^{n-2} + q'''a^{n-3} + r'''a^{n-4} + \text{rc.} = 0$$
$$\text{rc.}$$

in welche sich die Gleichung für a in 5 zerlegen läßt. Ob aber die Gleichung für p irgend einer Reduktion fähig sey, oder nicht, ist hier noch nicht der Ort zu untersuchen.

Anmerk. Hieraus ergiebt sich, daß eine Gleichung vom n ten Grade, wenn n eine Primzahl ist, nach dieser Umformungsart auf eine Gleichung des $1 . 2 . 3 \ldots n - 2$ ten

Grades führt; also eine Gleichung vom fünften Grade auf eine Gleichung vom sechsten Grade, und eine Gleichung vom siebenten Grade gar auf eine Gleichung vom 120sten Grade, u. s. w.

§ 136.

Aufg. Es bleibe alles wie in der Aufgabe des vorigen §'s, nur sey n eine zusammengesetzte Zahl: man soll den Grad der Gleichungen bestimmen, von welchen die angenommenen Coefficienten a, b, c, d, ꝛc. abhängen.

Aufl. 1) Wenn man sich unter α, nicht wie im vor. §, irgend eine beliebige imaginäre Wurzel der Gleichung $y^n - 1 = 0$, sondern nur eine primitive Wurzel derselben denkt, so finden zwar alle die in 1, 2, 3, 4, 5, 6, des vor. §'s gemachten Schlüsse auch hier ihre Anwendung, wo n eine zusammengesetzte Zahl ist; die folgenden Nummern hingegen müssen, dieses Umstandes wegen, einige Abänderungen erleiden. Wollte man nämlich hier, wie in 7 des vor. §'s, in der Reihe der Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-1}$ für α ohne Unterschied die Potenzen $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots, \alpha^{n-1}$ substituiren, so würde man nicht immer dieselben Wurzeln wieder finden, sondern dies wird nur für diejenigen Potenzen unter ihnen, $\alpha^\nu, \alpha^\pi, \alpha^\varrho$, ꝛc. Statt haben, deren Exponenten ν, π, ϱ, ꝛc. kein gemeinschaftliches Maaß mit n haben, weil nur diese primitive Wurzeln der Gleichung $y^n - 1 = 0$ sind (§ 90). Wäre z. B. α eine primitive Wurzel der Gleichung $y^6 - 1 = 0$, so erhielte man, wenn in $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$, successive $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$, für α gesetzt wird, folgende Resultate: $\alpha^2, \alpha^4, 1, \alpha^2, \alpha^4$; $\alpha^3, 1, \alpha^3, 1, \alpha^3$; $\alpha^4, \alpha^2, 1, \alpha^4, \alpha^2$; $\alpha^5, \alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha$; von welchen nur das letzte dieselben Wurzeln wieder enthält.

2) Hieraus folgt, daß das, was im vor. §. in 7 und den folgenden Nummern von der Substitution der Wurzeln α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} für α gesagt worden, bloß auf diejenigen α^ν, α^π, α^ϱ, ꝛc. eingeschränkt werden muß, deren Exponenten ν, π, ϱ, ꝛc. mit n kein gemeinschaftliches Maaß haben. Nehmen wir also an, daß λ die Anzahl der primitiven α^ν, α^π, α^ϱ, ꝛc. sey, und daß die λ Werthe von a, welche man durch die Substitution dieser Wurzeln für α erhält, die Wurzeln folgender Gleichung seyen:

$$a^\lambda + pa^{\lambda-1} + qa^{\lambda-2} + ra^{\lambda-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

so ist p (und das Nämliche gilt auch von q, r, ꝛc.) eine solche Funktion, welche bey der Vertauschung der Wurzel α mit α^ν, α^π, α^ϱ, ꝛc., oder, welches auf eins hinausläuft, bey der Vertauschung der Wurzel x' mit $x^{(\nu)}$, $x^{(\pi)}$, $x^{(\varrho)}$, ꝛc. ungeändert bleibt. Da nun hierdurch die sämmtlichen 1 . 2 . 3 .... n − 1 Werthe von p zu λ und λ einander gleich werden, so folgt, daß diese Größe von einer Gleichung abhängen werde, deren Grad

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n-1}{\lambda}$$

Um übrigens die Gleichung $a^\lambda + pa^{\lambda-1} + \text{ꝛc.} = 0$ wirklich zu finden, darf man nur in dem Ausdrucke für a, den man nach 1 des vor. §'s erhält, die Wurzel α mit Hülfe derjenigen Gleichung, welche bloß die primitiven Wurzeln enthält, und welche zu finden in § 88 gelehrt worden, eliminiren.

Anmerk. Es führt also die Gleichung des n ten Grades, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, auf eine Gleichung des $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}{\lambda}$ten Grades, wo λ die Zahl der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ bezeichnet; mithin eine Gleichung des vierten Grades auf eine Gleichung des dritten

Grades, weil die Gleichung $x^4 - 1 = 0$ zwey primitive Wurzeln α und α^3 hat; eine Gleichung des sechsten Grades auf eine Gleichung des 60sten Grades, weil die Gleichung $x^6 - 1 = 0$ ebenfalls zwey primitive Wurzeln hat, nämlich α und α^5; eine Gleichung des achten Grades auf eine Gleichung des 1260sten Grades, weil die Gleichung $x^8 - 1 = 0$ vier primitive Wurzeln, nämlich α, α^3, α^5, α^7, hat; u. s. w.

Aus diesem und dem vor. § ergiebt sich nun, daß die Reduktion der Gleichung $x^n + Ax^{n-1} +$ &c. $= 0$ auf eine von der Form $y^n - V = 0$, immer auf eine höhere Gleichung führt, als die gegebene selbst ist, sobald die gegebene Gleichung den vierten Grad übersteigt. Auf die Prüfung anderer Arten von Umformungen werde ich mich übrigens hier nicht einlassen, weil dieser ganze Gegenstand weiterhin von einem höheren Standpunkte aus beurtheilt werden wird, wozu das Gegenwärtige nur als Vorbereitung dienen sollte.

§ 137.

Wenn man die Gleichung $x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + \ldots + k\sqrt[n]{p^{n-1}}$. oder allgemeiner die Gleichung $x = a + b\sqrt[n]{p} + c\sqrt[n]{p^2} + d\sqrt[n]{p^3} + \ldots + k\sqrt[n]{p^{n-1}}$ rational macht, so kommt man, wie aus dem vorhergehenden Capitel bekannt ist, auf eine Gleichung des $n$ten Grades, die ich durch $x^n + \mathfrak{A}x^{n-1} + \mathfrak{B}x^{n-2} + \mathfrak{C}x^{n-3} +$ &c. $= 0$ vorstellen will, worin die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. gewisse rationale Funktionen von den Größen a, b, c, d, &c. und p seyn werden. Ist umgekehrt eine Gleichung des $n$ten Grades $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} +$ &c. $= 0$ gegeben, und nimmt man an, daß die Wurzeln die vorhin angegebene Form haben, so hat man zur Bestimmung von a, b, c, d, &c. die n Bedingungsgleichungen $\mathfrak{A} = A$, $\mathfrak{B} = B$, $\mathfrak{C} = C$, &c. Könnte man

diese Gleichungen auflösen, und daraus a, b, c, ꝛc. bestimmen, so hätte man mit einem Male die n Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn man für $\sqrt[n]{p}$ successive seine n Werthe setzte.

Alles beruhet daher auf die Auflösung dieser Bedingungsgleichungen. Wie schwierig und mühsam diese Auflösung für etwas hohe Gleichungen seyn müsse, kann man schon aus der Form derjenigen Gleichungen erkennen, welche in 7. § 108 für den fünften Grad gefunden worden. Waring und Euler glaubten, daß man auf diesem Wege zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen gelangen müßte, wenn man nur die Rechnung gehörig anstellte, und die Mühe nicht scheute, sie durchzuführen. Man kann sich aber dieser Mühe überheben, wenn man, wie Herr Lagrange im dritten Bande der neuen Memoiren der Berliner Akademie thut, die Methode einer vorgängigen Prüfung a priori unterwirft.

§ 138.

Aufg. Es wird angenommen, daß

$$x = a + b\sqrt[n]{p} + c\sqrt[n]{p^2} + d\sqrt[n]{p^3} + \ldots + k\sqrt[n]{p^{n-1}}$$

eine Wurzel der gegebenen Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

sey: man soll unter der Voraussetzung, daß n eine Primzahl sey, den Grad der Gleichungen bestimmen, von welchen die Coefficienten a, b, c, d, ꝛc. abhängen werden.

Aufl. 1) Man setze $\sqrt[n]{p} = y$; alsdann sind y, αy, βy, γy, δy, ꝛc. die n Werthe von $\sqrt[n]{p}$, wenn 1, α, β, γ, δ, ꝛc. die n Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ sind. Bezeich-

net man also die Wurzeln der gegebenen Gleichung durch x', x'', x''', 2c., so hat man folgende n Gleichungen:

$$x' = a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots + ky^{n-1}$$
$$x'' = a + \alpha by + \alpha^2 cy^2 + \alpha^3 dy^3 + \ldots + \alpha^{n-1} ky^{n-1}$$
$$x''' = a + \beta by + \beta^2 cy^2 + \beta^3 dy^3 + \ldots + \beta^{n-1} ky^{n-1}$$
$$x^{iv} = a + \gamma by + \gamma^2 cy^2 + \gamma^3 dy^3 + \ldots + \gamma^{n-1} ky^{n-1}$$

2c.

aus welchen nun die n unbekannten Größen a, b, c, d, . . . k, bestimmt werden müssen.

2) Multiplicirt man diese Gleichungen, in der Ordnung, wie sie von oben nach unten auf einander folgen, erst durch die Potenzen 1, α^n, β^n, γ^n, 2c., dann durch die Potenzen 1, α^{n-1}, β^{n-1}, γ^{n-1}, 2c., hierauf durch die Potenzen 1, α^{n-2}, β^{n-2}, γ^{n-2}, 2c., und so immer fort, endlich zuletzt durch 1, α, β, γ, 2c., und addirt die durch jede solche Multiplikation erhaltenen n Resultate zusammen; so erhält man, da $'[n] = n$, und jeder Summenausdruck $'[p]$, dessen Wurzelexponent p nicht durch n gemessen wird, $= 0$ ist,

$$na = x' + x'' + x''' + x^{iv} + \text{2c.}$$
$$nyb = x' + \alpha^{n-1} x'' + \beta^{n-1} x''' + \gamma^{n-1} x^{iv} + \text{2c.}$$
$$ny^2 c = x' + \alpha^{n-2} x'' + \beta^{n-2} x''' + \gamma^{n-2} x^{iv} + \text{2c.}$$
$$ny^3 d = x' + \alpha^{n-3} x'' + \beta^{n-3} x''' + \gamma^{n-3} x^{iv} + \text{2c.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$ny^{n-2} i = x' + \alpha^2 x'' + \beta^2 x''' + \gamma^2 x^{iv} + \text{2c.}$$
$$ny^{n-1} k = x' + \alpha x'' + \beta x''' + \gamma x^{iv} + \text{2c.}$$

3) Hieraus läßt sich nun unmittelbar a bestimmen; denn da $x' + x'' + x''' + x^{iv} + \text{2c.} = [1] = A$, so erhält man aus der ersten Gleichung

$$a = \frac{A}{n}$$

Es hat also a nur einen einzigen Werth, hingegen haben die

übrigen Größen b, c, d, ... i, k, sämmtlich mehrere Werthe, welche aus den n—1 folgenden Gleichungen erhalten werden, wenn man darin die Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(n)}$ auf alle Weise permutirt. Die Gleichung, von welcher jede derselben abhängt, ist daher allgemein genommen von dem Grade 1 . 2 . 3 . . . . n. Sollte es aber unter diesen Werthen gleiche geben, oder sich sonst irgend eine Relation unter ihnen finden, so wird sich der Grad der Gleichungen erniedrigen lassen.

4) Da eine der n + 1 Größen a, b, c, d, ... k, p, willkührlich angenommeu werden kann, so wollen wir $p = 1$ setzen; also auch $y = 1$. Zugleich wollen wir, um die Formeln einfacher zu machen,

$$k = \frac{a'}{n},\ i = \frac{a''}{n},\ h = \frac{a'''}{n}, \ldots . b = \frac{a^{(n-1)}}{n}$$

setzen. Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen in 2, wenn man die erste wegläßt, und die übrigen in umgekehrter Ordnung schreibt, in folgende:

$$a' = x' + \alpha x'' + \beta x''' + \gamma x^{IV} + \text{etc.}$$
$$a'' = x' + \alpha^2 x'' + \beta^2 x''' + \gamma^2 x^{IV} + \text{etc.}$$
$$a''' = x' + \alpha^3 x'' + \beta^3 x''' + \gamma^3 x^{IV} + \text{etc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{(n-1)} = x' + \alpha^{n-1} x'' + \beta^{n-1} x''' + \gamma^{n-1} x^{IV} + \text{etc.}$$

5) Da die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ (weil, der Voraussetzung gemäß, n eine Primzahl ist) durch 1, α, α^2, α^3, ... α^{n-1} ausgedrückt werden können, was für eine imaginäre Wurzel auch α bezeichnen mag, so kann man α^2, α^3, α^4, etc. für β, γ, δ, etc. setzen; hierdurch erhält man die erste Gleichung

$$a' = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \ldots . + \alpha^{n-1} x^{(n)}$$

und die Werthe von a'', a''', a^{IV}, ... $a^{(n-1)}$ werden aus diesem

diesem Werthe von a' abgeleitet, wenn man α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} für α setzt, d. h. wenn man für α eine jede imaginäre Wurzel der Gleichung $y^n - 1 = 0$ setzt. Bezeichnet also unbestimmt t eine jede der Größen a', a'', a''' ....$a^{(n-1)}$, so ist

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \ldots + \alpha^{n-1} x^{(n)}$$

6) Um nun alle Werthe zu finden, deren t fähig ist, dürfte man nur die Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(n)}$, auf alle Weise permutiren. Zu unserer Absicht ist es indessen dienlicher, hierbey wie folgt zu verfahren: 1) man permutire bloß die $n-2$ Wurzeln x''', x^{iv}, x^{v}, ... $x^{(n)}$, indem man x', x'', an ihren Stellen läßt, so erhält man $1.2.3 \ldots n-2$ Resultate; 2) man setze in jedem der erhaltenen Resultate erst α^2, hernach α^3, hierauf α^4 u. s. w. und zuletzt α^{n-1} für α, so hat man überhaupt $1.2.3 \ldots n-1$ Resultate, welche man auch erhalten haben würde, wenn man x' an seiner Stelle gelassen, und bloß die Wurzeln x'', x''', x^{iv}, ... $x^{(n)}$ permutirt hätte; endlich 3) multiplicire man die gefundenen $1.2.3 \ldots n-1$ Resultate successive mit α, α^2, α^3, ... α^{n-1}, so erhält man mit jenen zusammen die $1.2.3 \ldots n$ Resultate, welche aus der Versetzung aller Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(n)}$ entspringen, und somit auch alle Werthe von t.

7) Bezeichnet man daher die $1.2.3 \ldots n-1$ Werthe von t, welche durch die beyden ersten Operationen erhalten werden, durch t', t'', t''', t^{iv}, ꝛc., so können die $1.2.3 \ldots n$ sämmtlichen Werthe von t auf die folgende Art ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{l} t',\ \alpha t',\ \alpha^2 t',\ \alpha^3 t',\ \alpha^4 t',\ \ldots\ \alpha^{n-1} t' \\ t'',\ \alpha t'',\ \alpha^2 t'',\ \alpha^3 t'',\ \alpha^4 t'',\ \ldots\ \alpha^{n-1} t'' \\ t''',\ \alpha t''',\ \alpha^2 t''',\ \alpha^3 t''',\ \alpha^4 t''',\ \ldots\ \alpha^{n-1} t''' \end{array}$$

ꝛc.

Setzt man $t'^{n} = \theta'$, $t''^{n} = \theta''$, $t'''^{n} = \theta'''$ ꝛc., so sind die Werthe in der ersten Horizontalreihe die Wurzeln der Gleichung $t^n - \theta' = 0$, die in der zweyten Reihe die Wurzeln der Gleichung $t^n - \theta'' = 0$, ꝛc.: folglich die Gleichung für t das Produkt der Gleichungen

$$t^n - \theta' = 0,\ t^n - \theta'' = 0,\ t^n - \theta''' = 0$$

ꝛc.

8) Hieraus ergiebt sich, daß die Gleichung für t nur solche Potenzen enthalten werde, welche durch n theilbar sind. Setzt man daher $t^n = \theta$, so daß

$$\theta = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \ldots + \alpha^{n-1} x^{(n)})^n$$

so erhält man eine Gleichung für θ vom $1 . 2 . 3 \ldots n-1$ten Grade, deren Wurzeln θ', θ'', θ''', ꝛc. seyn werden, welche man aus θ erhält, wenn man die $n-1$ Wurzeln x'', x''', x^{IV}, ... $x^{(n)}$ permutirt und x' an seiner Stelle läßt.

9) Anstatt die Wurzeln x'', x''', x^{IV}, ... $x^{(n)}$ in dem Ausdruck von θ zu permutiren, ist es, wie bey t, schon hinlänglich, bloß die $n-2$ Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, ... $x^{(n)}$, zu permutiren, hierauf α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} für α zu substituiren, und in den daraus entspringenden $n-1$ Werthen von θ die Wurzeln x''', x^{IV} x^{V}, ... $x^{(n)}$ zu permutiren.

10) Wir wollen nun annehmen, die $n-1$ Werthe von θ, welche aus der Substitution von α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} für α entspringen, seyen Wurzeln folgender Gleichung

$$\text{(A)} \ldots \theta^{n-1} - p\theta^{n-2} + q\theta^{n-3} - r\theta^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0;$$

so sind die Coefficienten p, q, r, ꝛc. Funktionen dieser Werthe, und können daher, so wie diese, durch den Stellenwechsel des x' keine Aenderung leiden. Da sie aber zugleich in Hinsicht auf diese Werthe symmetrisch sind, so können sie auch durch die Substitution von α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1}, für α keine

Aenderung leiden, weil daraus weiter nichts entstehet, als daß von den n — 1 Werthen von θ der eine in den andern übergehet. Hieraus folgt aber, daß diese Coefficienten nicht mehr ungleiche Werthe haben können, als die, welche aus der ausschließlichen Versetzung der n — 2 Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, ... $x^{(n)}$ entspringen, und daß sie also sämmtlich von Gleichungen des 1 . 2 . 3 . . . . n — 2 ten Grades abhängen werden.

11) Es läßt sich also die Gleichung für θ, welche, wie wir gesehen haben, vom 1 . 2 . 3 . . . . n — 1 ten Grade ist, jederzeit, wenn n eine Primzahl ist, in 1 . 2 . 3 . . . . n — 2 Gleichungen vom n — 1 ten Grade zerlegen. Ist nun (A) eine dieser Gleichungen, und sind θ', θ'', θ''', ... $\theta^{(n-1)}$ ihre n — 1 Wurzeln, so sind $\sqrt[n]{\theta'}$, $\sqrt[n]{\theta''}$, $\sqrt[n]{\theta'''}$, ... $\sqrt[n]{\theta^{(n-1)}}$, die ihnen korrespondirenden Werthe von t, oder von a', a'', a''', ... $a^{(n-1)}$, und substituirt man diese Werthe nach einer beliebigen Ordnung in den Ausdrücken in 4, so erhält man

$$b = \frac{\sqrt[n]{\theta'}}{n}, \quad c = \frac{\sqrt[n]{\theta''}}{n}, \quad d = \frac{\sqrt[n]{\theta'''}}{n}, \text{ 2c.}$$

mithin, da p = 1 gesetzt worden,

$$x = \frac{A}{n} + \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{\theta'} + \sqrt[n]{\theta''} + \sqrt[n]{\theta'''} + \ldots + \sqrt[n]{\theta^{(n-1)}}\right)$$

Daß aber für θ nur diejenigen von den 1 . 2 . 3. . . . n — 1 Werthen genommen werden dürfen, welche zu einer und derselben Gleichung, gleichviel welche, $\theta^{n-1} - p\,\theta^{n-2} +$ 2c. $= 0$ gehören, erhellet daraus, daß die n — 1 Werthe von t, also auch die ihnen korrespondirenden Werthe von θ, so von einander abhängen müssen, daß man sie sämmtlich erhält, wenn

man in einem derselben α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} für α substituirt (5).

12) Will man die Gleichung (A) wirklich finden, so entwickele man vor allem die Funktion

$$\theta = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \dots + \alpha^{n-1} x^{(n)})^n$$

nach Potenzen von α, welches mit Hülfe des polynomischen Satzes sehr leicht geschehen kann. Da aber $\alpha^n, \alpha^{n+1}, \alpha^{n+2}$, ꝛc. nichts anders als 1, α, α^2, ꝛc., so wird diese Entwickelung nach der gehörigen Reduktion folgende Form annehmen:

$$\xi' + \xi''\alpha + \xi'''\alpha^2 + \xi^{IV}\alpha^3 + \dots + \xi^{(n)}\alpha^{n-1}$$

und es werden ξ', ξ'', ξ''', ... $\xi^{(n-1)}$ bloß Funktionen von x', x'', x''', ... $x^{(n-1)}$ ohne α seyn. Setzt man in diesem Werthe von θ successive α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1} für α, oder, welches eben so viel ist, β, γ, δ, ꝛc für α, so erhält man die Werthe von θ', θ'', θ''', ... $\theta^{(n-1)}$, nämlich:

$$\theta' = \xi' + \xi''\alpha + \xi'''\alpha^2 + \dots + \xi^{(n)}\alpha^{n-1}$$
$$\theta'' = \xi' + \xi''\beta + \xi'''\beta^2 + \dots + \xi^{(n)}\beta^{n-1}$$
$$\theta''' = \xi' + \xi''\gamma + \xi'''\gamma^2 + \dots + \xi^{(n)}\gamma^{n-1}$$

ꝛc.

woraus sich nun ferner die Gleichung (A) auf die gewöhnliche Weise zusammensetzen läßt. Die Coefficienten p, q, r, ꝛc. werden alsdann noch Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(n)}$ seyn, aber von solcher Beschaffenheit, daß sie nur durch die Versetzung der Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, ... $x^{(n)}$ eine Aenderung erleiden. Die Gleichungen für diese Funktionen lassen sich auf die im dritten Capitel gelehrte Weise finden. Uebrigens ist es, wie im folgenden Capitel gezeigt werden wird, schon hinlänglich eine dieser Gleichungen, etwa die für p, aufgelöst zu haben, weil sich aus dem bekanntem Werthe von p die Werthe von q, r, ꝛc. direkt, und ohne Auflö-

fung irgend einer andern Gleichung finden lassen. Auch genügt es schon, wie sich aus 11 ergiebt, nur einen einzigen Werth für jeden der Coefficienten p, q, r, ꝛc. gefunden zu haben.

13) Aus allem dem, was bisher gesagt worden, ergiebt sich, daß die Auflösung einer Gleichung des nten Grades, wenn n eine Primzahl ist, von der Auflösung einer Gleichung für p von dem $1 . 2 . 3 \ldots . n - 2$ ten Grade abhänge; und dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches im § 135 auf einem andern Wege gefunden worden. Zu mehrerer Erläuterung will ich nun die Anwendung auf die Gleichung des fünften Grades machen.

Anmerk. Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, so müssen die gemachten Schlüsse in Hinsicht auf die Vertauschung der Wurzel α mit α^2, α^3, α^4, ... α^{n-1}, eben solche Abänderungen erleiden, wie die Schlüsse § 135 in § 136 in demselben Falle erleiden mußten, und man wird alsdann so wie dort finden, daß eine Gleichung des n ten Grades auf eine Gleichung des $\frac{1 . 2 . 3 \ldots n - 1}{\lambda}$ ten Grades führe, wenn λ die Anzahl der primitiven Wurzeln der Gleichung $y^n - 1 = 0$ bezeichnet.

§ 139.

Aufg. Aus der gegebenen Gleichung des fünften Grades

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

die reducirte Gleichung für die Größe p des vor. §'s wirklich zu finden.

Aufl. 1) Die Gleichung (A) in 10 des vor. §'s wird hier, wo n = 5,

$$\theta^4 - p\theta^3 + q\theta^2 - r\theta + s = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind, wenn α, β, γ, δ, die imaginären Wurzeln der Gleichung $y^5 - 1 = 0$ bezeichnen,

$$\theta' = \xi' + \xi''\alpha + \xi'''\alpha^2 + \xi^{\prime v}\alpha^3 + \xi^{v}\alpha^4$$
$$\theta'' = \xi' + \xi''\beta + \xi'''\beta^2 + \xi^{\prime v}\beta^3 + \xi^{v}\beta^4$$
$$\theta''' = \xi' + \xi''\gamma + \xi'''\gamma^2 + \xi^{\prime v}\gamma^3 + \xi^{v}\gamma^4$$
$$\theta^{\prime v} = \xi' + \xi''\delta + \xi'''\delta^2 + \xi^{\prime v}\delta^3 + \xi^{v}\delta^4$$

2) Addirt man diese Gleichungen zusammen, so erhält man, da $\theta' + \theta'' + \theta''' + \theta^{\prime v} = p$, und $\alpha + \beta + \gamma + \delta = {}^{\backprime}[1] - 1 = -1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = {}^{\backprime}[2] - 1 = -1$, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = {}^{\backprime}[3] - 1 = -1$, $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 = {}^{\backprime}[4] - 1 = -1$;

$$p = 4\xi' - (\xi'' + \xi''' + \xi^{\prime v} + \xi^{v})$$
$$= 5\xi' - (\xi' + \xi'' + \xi''' + \xi^{\prime v} + \xi^{v})$$

3) Der zweyte Theil des Ausdruckes für p, nämlich $\xi' + \xi'' + \xi''' + \xi^{\prime v} + \xi^{v}$, läßt sich unmittelbar bestimmen. Denn aus 12 des vor. §'s ergiebt sich, daß die Entwickelung von

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{\prime v} + \alpha^4 x^{v})^5$$

die folgende Form annehme:

$$\xi' + \xi''\alpha + \xi'''\alpha^2 + \xi^{\prime v}\alpha^3 + \xi^{v}\alpha^4;$$

und diese Form der Entwickelung bleibt immer richtig, welche Wurzel der Gleichung $x^5 - 1 = 0$ man für α setzen mag; also auch dann, wenn $\alpha = 1$ gesetzt wird. Thut man dies aber, so findet man

$$\xi' + \xi'' + \xi''' + \xi^{\prime v} + \xi^{v} =$$
$$(x' + x'' + x''' + x^{\prime v} + x^{v})^5$$
$$= [1]^5 = A^5$$

Man hat also auch

$$p = 5\xi' - A^5.$$

4) Um daher p zu bestimmen, ist weiter nichts nöthig, als ξ' zu suchen, d. h. dasjenige Glied in der Entwickelung von $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^{V})^5$, welches kein α enthält. Man kann zu dem Ende diesem Ausdrucke die folgende Form geben:

$$\alpha^{-5}(\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + \alpha^5 x^{V})^5$$

oder, da $\alpha^{-5} = 1$ ist, die folgende.

$$(\alpha x + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + \alpha^3 x^{V})^5$$

woraus der Vortheil entspringt, daß die Marken von x mit den Exponenten von α übereinstimmend werden. Denn nun hat man, wie in dem polynomischen Satze gezeigt wird, nichts weiter zu thun, als die Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, auf alle mögliche Arten so mit einander zu verbinden, daß die Summe der Marken $= 5$, $= 10$, $= 15$, $= 20$, $= 25$ werde, weil $\alpha^5 = \alpha^{10} = \alpha^{15} = \alpha^{20} = \alpha^{25} = 1$ ist. Auf diese Weise findet man, wenn $[5]$, $[1^5]$, für $x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x^{IV5} + x^{V5}$, $x'x''x'''x^{IV}x^{V}$ gesetzt wird,

$$\xi' = [5] + [1^5] +$$

$$20\left\{\begin{matrix} x'^3x''x^{V} + x'^3x'''x^{IV} + x'x''^3x''' + x'x''x^{IV3} + \\ x'x'''^3x^{V} + x''^3x^{IV}x^{V} + x''x'''^3x^{IV} + x'x^{IV}x^{V3} \\ + x''x'''x^{V3} + x'''x^{IV3}x^{V} \end{matrix}\right\}$$

$$+30\left\{\begin{matrix} x'^2x''^2x^{IV} + x'^2x''x'''^2 + x'^2x'''x^{V2} + x'^2x^{IV2}x^{V} + \\ x'x''^2x^{V2} + x'x'''^2x^{IV2} + x''^2x'''^2x^{V} + x''^2x'''x^{IV2} \\ + x''x^{IV2}x^{V2} + x'''^2x^{IV}x^{V2} \end{matrix}\right\}$$

oder, wenn man das, was sich in dem Werthe von ξ' nicht in dem Summenzeichen befindet, der Kürze wegen durch ζ bezeichnet

$$\xi' = [5] + [1^5] + \zeta$$

mithin

$$p = 5\zeta + 5[5] + 5[1^5] - A^5$$

5) Unter den 120 Werthen, welche die Funktion ζ durch

die Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, erhalten kann, wird man nicht mehr als sechs ungleiche finden, und diese werden gerade diejenigen seyn, welche aus der ausschließlichen Versetzung der drey Wurzeln x''', x^{IV}, x^{V}, entspringen. Bezeichnet man diese Werthe durch ζ', ζ'', ζ''', ζ^{IV}, ζ^{V}, ζ^{VI}, und die korrespondirenden Werthe von p durch p', p'', p''', p^{IV}, p^{V}, p^{VI}, so erhält man

$$p' = 5\zeta' + 5[5] + 5[1^5] - A^5$$
$$p'' = 5\zeta'' + 5[5] + 5[1^5] - A^5$$
$$p''' = 5\zeta''' + 5[5] + 5[1^5] - A^5$$
$$p^{IV} = 5\zeta^{IV} + 5[5] + 5[1^5] - A^5$$
$$p^{V} = 5\zeta^{V} + 5[5] + 5[1^5] - A^5$$
$$p^{VI} = 5\zeta^{VI} + 5[5] + 5[1^5] - A^5$$

und diese sechs Werthe von p werden die Wurzeln der gesuchten reducirten Gleichung seyn. Man weiß schon aus dem dritten Capitel, wie man nun ferner zu verfahren hat, um diese Gleichung selbst zu finden. Man thut indessen besser, anstatt der Gleichung für p die für ζ zu suchen; denn hat man ζ, so hat man auch p.

VII. Allgemeine Methode, aus dem bekannten Werthe einer gegebenen Funktion der Wurzeln einer Gleichung, den Werth einer jeden andern Funktion dieser Wurzeln zu finden.

§ 140.

Alle Methoden, welche man bis jetzt auf die Auflösung der Gleichungen angewandt hat, gründen sich entweder auf die Zerlegung, oder auf die Umformung derselben. Die ersteren können schon, ihrer Natur wegen, nicht allgemein seyn, weil sich nicht jede Gleichung in andere von niedrigern Graden zerfällen läßt. Es bleibt daher, so lange man es mit der allgemeinen Auflösung der Gleichungen zu thun hat, kein anderes Mittel übrig, als die gegebenen Gleichungen in andere umzuformen, die entweder an sich, nach den schon bekannten Methoden, auflösbar sind, oder es durch Zerlegung werden können.

Gesetzt nun, man hätte auf irgend eine Weise, gleichviel welche, die gegebene Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

in eine andere

$$t^m + A't^{m-1} + B't^{m-2} + C't^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

umgeformt, so müssen die Wurzeln der letzteren Gleichung mit den Wurzeln der ersteren in irgend einer Beziehung stehen,

oder, mit andern Worten, es muß sich t durch irgend eine Funktion der Wurzeln x′, x″, x‴, rc. ausdrücken lassen. Ich behaupte nun, daß es jederzeit erlaubt sey, t für eine rationale Funktion jener Wurzeln anzunehmen. Denn es bezeichne $F:(x')\,(x'')\,(x''')\ldots(x^{(n)})$ irgend eine irrationale Funktion jener Wurzeln, und es sey $t=F:(x')\,(x'')\,(x''')\ldots(x^{(n)})$; so kann diese Gleichung, wie im fünften Capitel gezeigt worden, durch Wegschaffung der Wurzelgrößen, immer rational gemacht werden. Man wird dadurch eine Gleichung

$$t^{\mu} + A''t^{\mu-1} + B''t^{\mu-2} + C''t^{\mu-3} + \text{rc.} = 0$$

erhalten, in welcher die Coefficienten A″, B″, C″, rc. lauter rationale Funktionen von x′, x″, x‴, rc. seyn werden. Eliminirt man nun aus dieser Gleichung und der Gleichung $t^m + A't^{m-1} + B't^{m-2} + \text{rc.} = 0$ alle Potenzen von t, bis auf die erste, so erhält man für t eine bloß rationale Funktion.

Es kommt daher bey der Umformung der Gleichungen zuerst darauf an, solche rationale Funktionen von x′, x″, x‴, rc. zu finden, für welche die transformirte Gleichung entweder unmittelbar aufgelöst, oder wenigstens von auflösbaren Gleichungen abhängig gemacht werden kann. Aber hiermit ist noch nicht alles geschehen; es ist noch nicht genug, die Werthe der angenommenen Funktion zu kennen, man muß auch aus diesen Werthen die Wurzeln x′, x″, x‴, rc. zu finden im Stande seyn. Ich will mich mit dem zweyten Gegenstande zuerst beschäftigen, und nach Herrn Lagrange im dritten Bande der neuen Berliner Memoiren das Verfahren zeigen, um aus dem bekannten Werthe einer gegebenen Funktion den Werth einer jeden anderen Funktion, also auch der Wurzeln selbst, zu finden. Es müssen hierbey zwey Fälle erwogen werden, nämlich: 1) der Fall, wo die gegebene und die gesuchte Funktion gleichartig sind; 2) der Fall, wo sie es nicht sind.

Mehrerer Deutlichkeit wegen, werde ich bisweilen, wenn von den Werthen einer Funktion die Rede ist, Formenwerthe von Zahlenwerthen unterscheiden; die ersteren sind die verschiedenen Formen selbst, welche aus der Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. entspringen; die letzteren, die wirklichen, durch gegebene Größen ausgedrückten Werthe dieser Formen.

§ 141.

Aufg. Es wird angenommen, daß man die gegebene Gleichung

$$\text{I.}\quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

durch die Einführung einer neuen Größe $t = f : (x')\,(x'')\,(x''')\,\ldots,(x^{(n)})$, nach der Anweisung im dritten Capitel, in eine Gleichung

$$\text{II.}\quad t^\pi + Pt^{\pi-1} + Qt^{\pi-2} + Rt^{\pi-3} + \ldots + U = 0$$

umgeformt habe, welche vollständig auflösbar ist, d. h. deren Wurzeln sich sämmtlich finden lassen; man soll nun aus diesen bekannten Zahlenwerthen der Funktion t die Zahlenwerthe irgend einer andern Funktion $y = \varphi : (x')\,(x'')\,(x''')\,\ldots(x^{(n)})$ finden, von welcher angenommen wird, daß sie jener gleichartig sey.

Aufl. 1) Da die Funktionen t, y, der Voraussetzung zufolge, gleichartig sind, so muß durch die Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. die eine gerade so viele ungleiche Werthe erhalten können als die andere. Die Funktion t hat aber π Werthe, weil die Gleichung II, durch welche sie gegeben ist, vom Grade π angenommen worden, also wird auch die zweyte Funktion π Werthe haben. Die Formenwerthe von t will ich durch t', t'', t''', ... $t^{(\pi)}$, und die Formenwerthe von y durch y', y'', y''', ... $y^{(\pi)}$ bezeichnen, und dabey

annehmen, daß diejenigen, welche dieselben Marken haben, aus denselben Versetzungen entsprungen seyen.

2) Da t und y gleichartige Funktionen sind, so kann irgend ein beliebiger, aus diesen Funktionen zusammengesetzter Ausdruck, nicht mehr ungleiche Formenwerthe erhalten, als sie selbst. Es kann daher auch ein Ausdruck wie $t^\lambda y$ nicht mehr als π verschiedene Werthe erhalten, und diese sind: $t'^\lambda y'$, $t''^\lambda y''$, $t'''^\lambda y''' + \ldots + (t^{(\pi)})^\lambda y^{(\pi)}$. Nimmt man die Summe aller dieser Werthe, so erhält man die Funktion

$$(\psi) \ldots\ t'^\lambda y' + t''^\lambda y'' + t'''^\lambda y''' + \ldots + (t^{(\pi)})^\lambda y^{(\pi)}$$

und diese Funktion hat die Eigenschaft, daß sie unverändert bleibt, wie man auch die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. unter einander versetzen mag; sie ist also in Hinsicht auf jene Wurzeln symmetrisch, und läßt sich folglich jederzeit, was auch λ für eine Zahl seyn mag, durch die Coefficienten A, B, C, ꝛc. der gegebenen Gleichung rational ausdrücken.

3) Bezeichnet man die Zahlenwerthe, welche die Funktion (ψ) erhält, wenn man successive $0, 1, 2, 3, \ldots \pi - 1$ für λ setzt, durch $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots z_{\pi-1}$, so erhält man folgende π Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
y' + y'' + y''' + \ldots + y^{(\pi)} = z_0 \\
t'y' + t''y'' + t'''y''' + \ldots + t^{(\pi)}y^{(\pi)} = z_1 \\
t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' + \ldots + (t^{(\pi)})^2y^{(\pi)} = z_2 \\
t'^3y' + t''^3y'' + t'''^3y''' + \ldots + (t^{(\pi)})^3y^{(\pi)} = z_3 \\
\ldots \\
t'^{\pi-1}y' + t''^{\pi-1}y'' + t'''^{\pi-1}y''' + \ldots + (t^{(\pi)})^{\pi-1}y^{(\pi)} = z_{\pi-1}
\end{array}$$

worin $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots z_{\pi-1}$, lauter bekannte, durch die Coefficienten der Gleichung I. ausgedrückte Größen sind.

4) Läßt man nunmehr $t', t'', t''', \ldots t^{(\pi)}$, anstatt der

Formenwerthe, die Zahlenwerthe der Funktion t bezeichnen, so sind dieselben nichts anders als die Wurzeln der Gleichung II, also, der Voraussetzung zufolge, sämmtlich bekannt. Es kommen also in den vorigen π Gleichungen keine andere unbekannte Größen als y', y'', y''', ... $y^{(\pi)}$ vor, und da ihrer an der Zahl π sind, also gerade so viel als man Gleichungen hat, so lassen sie sich, einige Ausnahmen, welche weiterhin untersucht werden sollen, abgerechnet, immer durch die Größen t', t'', t''', ... $t^{(\pi)}$ und z_0, z_1, z_2, z_3, ... $z_{\pi-1}$ rational ausdrücken, also auch durch die Größen t', t'', t''', ... $t^{(\pi)}$, und die Coefficienten A, B, C, ꝛc. der gegebenen Gleichung.

Beysp. Für $\pi = 1$ hat man bloß

$$y' = z_0$$

wie auch seyn muß, weil alsdann t und y symmetrische Funktionen von x', x'', x''', ꝛc. sind, und also y gar nicht mehr von t, sondern bloß von den Coefficenten A, B, C, ꝛc. abhängt.

Für $\pi = 2$ hat man die beyden Gleichungen

$$y' + y'' = z_0$$
$$t'y' + t''y'' = z_1$$

und hieraus

$$y' = \frac{z_1 - t''z_0}{t' - t''}, \quad y'' = \frac{z_1 - t'z_0}{t'' - t'}$$

Für $\pi = 3$ hat man die drey Gleichungen

$$y' + y'' + y''' = z_0$$
$$t'y' + t''y'' + t'''y''' = z_1$$
$$t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' = z_2$$

und hieraus erhält man

$$y' = \frac{z_2 - (t'' + t''')z_1 + t''t'''z_0}{(t' - t'')(t' - t''')}$$

$$y'' = \frac{z_2 - (t' + t''')z_1 + t't'''z_0}{(t'' - t')(t'' - t''')}$$

$$y''' = \frac{z_2 - (t' + t'')z_1 + t't''z_0}{(t''' - t')(t''' - t'')}$$

Eben so wird man für $\pi = 4$ folgende Werthe für y', y'', y''', y^{IV}, finden.

$$\frac{z_3 - (t'' + t''' + t^{IV})z_2 + (t''t''' + t''t^{IV} + t'''t^{IV})z_1 - t''t'''t^{IV}z_0}{(t' - t'')(t' - t''')(t' - t^{IV})}$$

$$\frac{z_3 - (t' + t''' + t^{IV})z_2 + (t't''' + t't^{IV} + t'''t^{IV})z_1 - t't'''t^{IV}z_0}{(t'' - t')(t'' - t''')(t'' - t^{IV})}$$

$$\frac{z_3 - (t' + t'' + t^{IV})z_2 + (t't'' + t't^{IV} + t''t^{IV})z_1 - t't''t^{IV}z_0}{(t''' - t')(t''' - t'')(t''' - t^{IV})}$$

$$\frac{z_3 - (t' + t'' + t''')z_2 + (t't'' + t't''' + t''t''')z_1 - t't''t'''z_0}{(t^{IV} - t')(t^{IV} - t'')(t^{IV} - t''')}$$

woraus sich nun das Gesetz der Fortschreitung sehr leicht erkennen läßt.

§ 142.

Aufg. Es bleibe alles wie in der Aufgabe des vor. §'s, mit der einzigen Abänderung, daß man nicht, wie daselbst angenommen wurde, alle Wurzeln der Gleichung II kenne, sondern nur eine einzige: man soll nun den diesem Zahlenwerthe der Funktion t korrespondirenden Zahlenwerth der Funktion y finden.

Aufl. 1) Es sey t' die bekannte Wurzel der Gleichung II. Wenn man diese Gleichung durch $t - t'$ dividirt, so erhält man eine andere Gleichung

$$\text{III.}\quad t^{\pi-1} + P't^{\pi-2} + Q't^{\pi-3} + \ldots + U' = 0$$

worin

$$P' = t' + P$$
$$Q' = t'^2 + Pt' + Q$$
$$R' = t'^3 + Pt'^2 + Qt' + R$$
$$S' = t'^4 + Pt'^3 + Qt'^2 + Rt' + S$$
$$\text{rc.}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind t'', t''', t^{IV}; ... $t^{(\pi)}$

2) Da hier nur die einzige Wurzel t' für bekannt angenommen wird, so muß man y' bloß durch t' auszudrücken suchen; und diesen Zweck erreicht man am leichtesten mit Hülfe der in § 57 gelehrten Eliminationsmethode auf die folgende Art. Man multiplicire die Gleichungen in 3 des vor. §'s, indem man mit der vorletzten anfängt, und von unten nach oben heraufgehet, mit P', Q', R', rc. nämlich die vorletzte mit P', die ihr vorhergehende mit Q', und so fort bis zur ersten, welche mit U' multiplicirt wird, und addire hierauf die erhaltenen Resultate zur letzten Gleichung; dadurch erhält man

$$z_{\pi-1} + P'z_{\pi-2} + Q'z_{\pi-3} + \ldots + U'z_0$$
$$= y'(t'^{\pi-1} + P't'^{\pi-2} + Q't'^{\pi-3} + \ldots + U')$$
$$+ y''(t''^{\pi-1} + P't''^{\pi-2} + Q't''^{\pi-3} + \ldots + U')$$
$$+ y'''(t'''^{\pi-1} + P't'''^{\pi-2} + Q't'''^{\pi-3} + \ldots + U')$$
$$\text{rc.}$$

3) Da t'', t''', t^{IV}, ... $t^{(\pi)}$, die Wurzeln der Gleichung III sind, so ist alles, was in dem zweyten Theile der so eben gefundenen Gleichung mit y'', y''', y^{IV}, ...$y^{(\pi)}$ multiplicirt ist, von selbst $= 0$. Man behält also bloß

$$z_{\pi-1} + P'z_{\pi-2} + Q'z_{\pi-3} + \ldots + U'z_0$$
$$= y'(t'^{\pi-1} + P't'^{\pi-2} + Q't'^{\pi-3} + \ldots + U')$$

und hieraus ergiebt sich

$$y' = \frac{z_{\pi-1} + P'z_{\pi-2} + Q'z_{\pi-3} + \ldots + U'z_0}{t'^{\pi-1} + P't'^{\pi-2} + Q't'^{\pi-3} + \ldots + U'}$$

4) Setzt man hierin für t' jede andere Wurzel der Gleichung II, so erhält man die Zahlenwerthe von y'', y''', y^{IV}, ... $y^{(\pi)}$. Läßt man also unbestimmt t und y zwey korrespondirende Zahlenwerthe, der eben so bezeichneten Funktionen bedeuten, so hat man überhaupt

$$y = \frac{z_{\pi-1} + P'z_{\pi-2} + Q'z_{\pi-3} + \dots + U'z_0}{t^{\pi-1} + P't^{\pi-2} + Q't^{\pi-3} + \dots + U'}$$

und es ist alsdann

$$P' = t + P$$
$$Q' = t^2 + Pt + Q$$
$$R' = t^3 + pt^2 + Qt + R$$
$$\text{rc.}$$

Beysp. In § 39 fanden wir, daß wenn $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ die gegebene Gleichung ist, die Funktion $t = x'x'' + x'''x^{IV}$ von folgender Gleichung des dritten Grades abhänge:

$$t^3 - Bt^2 + (AC - 4D)\, t - (C^2 - 4BD + A^2 D) = 0.$$

Ich will nun annehmen, man hätte diese Gleichung in so weit aufgelöst, daß man eine Wurzel derselben gefunden hätte, und daß man nun hieraus den Werth einer andern Funktion $y = (x'x'' - x'''x^{IV})^2$, welche jener gleichartig ist, bestimmen wollte.

Da hier $\pi = 3$ ist, so hat man

$$y = \frac{z_2 + P'z_1 + Q'z_0}{t^2 + P't + Q'}$$

Da ferner $P = -B$, $Q = AC - 4D$, so hat man

$$P' = t + P = t - B$$
$$Q' = t^2 + Pt + Q = t^2 - Bt + AC - 4D$$

Es kommt also bloß noch darauf an, die Werthe von z_0, z_1, z_2, zu bestimmen. Nun ist aber

$t' =$

$$t' = x'x'' + x'''x^{IV}\,,\quad y' = (x'x'' - x'''x^{IV})^2$$
$$t'' = x'x''' + x''x^{IV}\,,\quad y'' = (x'x''' - x''x^{IV})^2$$
$$t''' = x'x^{IV} + x''x'''\,,\quad y''' = (x'x^{IV} - x''x''')^2$$

welche, wenn man die Summenausdrücke aus den angehängten Tafeln nimmt, folgende Werthe geben:

$$z_0 = y' + y'' + y''' = [2^2] - 6[1^4]$$
$$= B^2 - 2AC - 4D$$
$$z_1 = t'y' + t''y'' + t'''y''' = [3^2] - [1^2 2^2]$$
$$= B^3 - 3ABC + 3C^2 + 3A^2D - 4BD$$
$$z_2 = t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' = [4^2] - 6[2^4]$$
$$= B^4 - 4AB^2C + 2A^2C^2 + 4BC^2 + 4A^2BD$$
$$- 4B^2D - 8ACD$$

Substituirt man die hier gefundenen Werthe von P', Q', z_0 z_1, z_2, so erhält man

$$y = \frac{\left(\begin{array}{l}(B^2 - 2AC - 4D)\,t^2 - (ABC - 3C^2 - 3A^2D)\,t \\ + 16D^2 - 4B^2D + BC^2 + A^2BD - 4ACD\end{array}\right)}{3t^2 - 2Bt + AC - 4D}$$

und mit Hülfe dieses Ausdruckes ist man nun im Stande für jeden Zahlenwerth der Funktion t einen Zahlenwerth der Funktion y zu finden.

Anmerk. Mit Hülfe der Differentialrechnung kann man dem Nenner des allgemeinen Ausdruckes für y in 4 eine einfachere Form geben. Da nämlich

$$(t - t')(t^{\pi-1} + P't^{\pi-2} + Q't^{\pi-3} + \ldots\ldots + U')$$
$$= (t^{\pi} + Pt^{\pi-1} + Qt^{\pi-2} + \ldots\ldots\ldots + U)$$

so hat man, wenn auf beyden Seiten in Beziehung auf t differentiirt, und durch das Differential dt dividirt wird,

$$(t-t')\,[(\pi-1)\,t^{\pi-2}+(\pi-2)P't^{\pi-3}+(\pi-3)Q't^{\pi-4}+\text{ic.}]$$
$$+t^{\pi-1}+P't^{\pi-2}+Q't^{\pi-3}+R't^{\pi-4}+\text{ic.}$$
$$=$$
$$\pi t^{\pi-1}+(\pi-1)\,Pt^{\pi-2}+(\pi-2)\,Qt^{\pi-3}+(\pi-3)\,Rt^{\pi-4}+\text{ic.}$$

Setzt man hierin t′ für t, so erhält man die Gleichung

$$t'^{\pi-1}+P't'^{\pi-2}+Q't'^{\pi-3}+R't'^{\pi-4}+\text{ic.}$$
$$=\pi t'^{\pi-1}+(\pi-1)\,Pt'^{\pi-2}+(\pi-2)\,Qt'^{\pi-3}+\text{ic.}$$

und da diese Gleichung richtig bleiben muß, was für eine Wurzel man auch für t′ annehmen mag, so hat man überhaupt

$$t^{\pi-1}+P't^{\pi-2}+Q't^{\pi-3}+\text{ic.}=$$
$$\pi t^{\pi-1}+(\pi-1)\,Pt^{\pi-2}+(\pi-2)\,Qt^{\pi-3}+(\pi-3)\,Rt^{\pi-4}+\text{ic.}$$

Es läßt sich daher der Werth von y auch auf die folgende Art ausdrücken

$$y=\frac{z_{\pi-1}+P'z_{\pi-2}+Q'z_{\pi-3}+\ldots\ldots\ldots+U'z_0}{\pi t^{\pi-1}+(\pi-1)\,Pt^{\pi-2}+(\pi-2)\,Qt^{\pi-3}+\ldots+T}$$

§ 143.

Wäre die Formel des vor. §'s überall anwendbar, so wären wir im Stande, aus dem gegebenen Werthe irgend einer Funktion f: (x′) (x″)(x‴) . . . . $(x^{(n)})$ den Werth einer jeden andern, ihr gleichartigen Funktion φ: x′) (x″) (x‴) . . . . $(x^{(n)})$ zu finden, und zwar unmittelbar und durch einen bloß rationalen Ausdruck. Sie ist es aber auch wirklich in allen nur erdenkbaren Fällen, bloß den einzigen ausgenommen, wo der Werth von t so beschaffen ist, daß der Nenner des Ausdrucks für y = o wird; ein Fall, dessen schon in § 59 Erwähnung geschehen. Um zu sehen, was es hier damit für

eine Bewandniß habe, betrachte ich den Nenner $t'^{\pi-1} + P't'^{\pi-2} + Q't'^{\pi-3} +$ ꝛc. in dem Ausdrucke des y in 5 des vor §'s. Er ist seiner Entstehung nach nichts anders, als das Produkt der Faktoren $t'-t''$, $t'-t'''$, $t'-t^{IV}$, ... $t'-t^{(\pi)}$. Soll er also verschwinden, so muß unter diesen Faktoren einer oder der andere = o werden, und es muß also t' einer, oder auch mehreren von den Wurzeln t'', t''', t^{IV}, ... $t^{(\pi)}$ gleich seyn. Hieraus ergiebt sich, daß der Fall, wo der Nenner in dem Ausdrucke für y verschwindet, nur dann eintreten könne, wenn die Gleichung II gleiche Wurzeln hat. Aber nun läßt sich auch einsehen, warum dieser Ausdruck den Werth von y' nicht geben konnte. Denn so lange eine Anzahl Wurzeln t', t'', t''', ... $t^{(\nu)}$ von einander verschieden sind, giebt t' den Werth von y', t'' den Werth von y'', ꝛc. Werden sie aber einander gleich, so muß die einzige Wurzel t' die ν Werthe y', y'', y''', ...$y^{(\nu)}$ zugleich geben; dieses ist aber bey dem gefundenen Ausdrucke für y unmöglich, da derselbe rational ist. Hieraus läßt sich aber weiter schließen, daß die ν Werthe y', y'', y''', ...$y^{(\nu)}$ durch einen einzigen irrationalen Ausdruck gegeben seyn müssen, welcher gerade ν Werthe erhalten kann, oder, welches auf eins hinausläuft, daß dieselben von einer Gleichung des n ten Grades abhängen müssen, deren Coefficienten sämmtlich rational sind. Wie diese Gleichung gefunden wird, soll sogleich gezeigt werden.

§ 144.

Hülfssatz.

Aufg. Es bezeichne Π irgend eine Funktion von x, und es sey die Gleichung

$$y = (x - a)^m \Pi$$

gegeben: man soll den Werth des Differential-Verhältnisses $\frac{d^m y}{dx^m}$ für den Fall finden, wo $x = a$ wird.

Aufl. 1) Es sey $m = 1$; also $y = (x - a)\ \Pi$. Differentiirt man diese Gleichung, so findet man

$$dy = (x - a)\ d\Pi + \Pi dx$$

Setzt man in dieser Gleichuug $x = a$, so verschwindet das erste Glied im zweyten Theile, und man hat also, wenn Π' das bezeichnet, was aus Π wird, wenn man $x = a$ setzt, $dy = \Pi' dx$, und $\frac{dy}{dx} = \Pi'$.

2) Es sey $m = 2$; also $y = (x - a)^2 \Pi$. Differentiirt man diese Gleichung zweymal hintereinander, so findet man

$$dy = (x - a)^2\ d\Pi + 2(x - a)\ \Pi dx$$
$$d^2y = (x - a)^2\ d^2\Pi + 4\,(x - a)\ d\Pi dx + 1.2\Pi dx^2$$

Setzt man in der zweyten Gleichung $x = a$, so verschwinden die beyden ersten Glieder im zweyten Theile, und man hat alsdann $d^2y = 1.2\,\Pi' dx^2$; also $\frac{d^2y}{dx^2} = 1.2\,\Pi'$

3) Es sey $m = 3$; also $y = (x - a)^3\,\Pi$. Wird diese Gleichung dreymal nach einander differentiirt, so erhält man successive

$$dy = (x - a)^3 d\,\Pi + 3(x - a)^2 \Pi dx$$
$$d^2y = (x - a)^3 d^2\Pi + 6(x - a)^2 d\Pi dx + 2.3(x - a)\Pi dx^2$$
$$d^3y = (x - a)^3 d^3\Pi + 9\,(x - a)^2 d^2\Pi dx + 18(x - a)\, d\Pi dx^2$$
$$+ 1\ .\ 2\ .\ 3\,\Pi dx^3$$

und wenn man $x = a$ setzt, $d^3y = 1\ .\ 2\ .\ 3\ \Pi' dx^3$, also $\frac{d^3y}{dx^3} = 1.2.3\,\Pi'$.

4) Ueberhaupt wird man, wie aus dem Fortgange der Rechnung leicht zu ersehen ist, nach m Differentiirungen der

Gleichung $y = (x-a)^m \Pi$, für $d^m y$ einen Differentialausdruck finden, dessen letztes Glied $1 . 2 . 3 \ldots m\Pi dx^m$ ist, und worin alle übrige Glieder den Faktor $x - a$ enthalten. Setzt man also $x = a$, so erhält man $d^m y = 1 . 2 . 3 \ldots \ldots m\Pi' dx^m$, und daher

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1 . 2 . 3 \ldots \ldots m\Pi'$$

§ 145.

Aufg. Wenn t und y zwey gleichartige Funktionen von den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. der gegebenen Gleichung

$$\text{I.} \quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

bezeichnen, aus dem bekannten Werthe der Funktion t den Werth der Funktion y in dem Falle zu finden, da die Gleichung

$$\text{II.} \quad t^\pi + Pt^{\pi-1} + Qt^{\pi-2} + Rt^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

von welcher die erstere abhängt, gleiche Wurzeln enthält, unter welchen sich der bekannte Werth von t befindet.

Aufl. 1) In § 142 Anmerk. fanden wir folgenden Ausdruck für y:

$$y = \frac{z_{\pi-1} + P'z_{\pi-2} + Q'z_{\pi-3} + \ldots + U'z_0}{\pi t^{\pi-1} + (\pi-1) Pt^{\pi-2} + (\pi-2) Qt^{\pi-3} + \text{ꝛc.}}$$

worin $P' = t + P$, $Q' = t^2 + Pt + Q$, ꝛc.; und aus diesem allgemeinen Ausdrucke erhält man die besonderen Werthe von y', y'', y''', ꝛc., wenn man t', t'', t''', ꝛc. für t schreibt. Wir wollen nun vor allem diesem Ausdrucke eine zu unserem Zwecke passendere Form geben.

2) Da t', t'', t''', ꝛc. die Wurzeln der Gleichung II sind, so ist

$$t^{\pi} + Pt^{\pi-1} + Qt^{\pi-2} + \text{ꝛc.} =$$
$$(t-t') (t-t'') (t-t''') (t-t^{IV}) \ldots\ldots (t-t^{(\pi)})$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf t, so erhält man nach der Division mit dt,

$$\pi t^{\pi-1} + (\pi-1) Pt^{\pi-2} + (\pi-2) Qt^{\pi-3} + \text{ꝛc.} =$$
$$(t-t'') (t-t''') (t-t^{IV}) \ldots\ldots (t-t^{(\pi)})$$
$$+ (t-t') (t-t''') (t-t^{IV}) \ldots\ldots (t-t^{(\pi)})$$
$$+ (t-t') (t-t'') (t-t^{IV}) \ldots\ldots (t-t)^{(\pi)}$$
$$\text{ꝛc.}$$

Setzt man hierin successive t′, t″, t‴, ꝛc. für t, so erhält man

$$\pi t'^{\pi-1} + (\pi-1) Pt'^{\pi-2} + (\pi-2) Qt'^{\pi-3} + \text{ꝛc.} =$$
$$(t'-t'') (t'-t''') (t'-t^{IV}) \ldots\ldots (t'-t^{(\pi)}$$
$$\pi t''^{\pi-1} + (\pi-1) Pt''^{\pi-2} + (\pi-2) Qt''^{\pi-3} + \text{ꝛc.} =$$
$$(t''-t') (t''-t''') (t''-t^{IV}) \ldots\ldots (t''-t^{(\pi)})$$
$$\pi t'''^{\pi-1} + (\pi-1) Pt'''^{\pi-2} + (\pi-2) Qt'''^{\pi-3} + \text{ꝛc.} =$$
$$(t'''-t') (t'''-t'') (t'''-t^{IV}) \ldots\ldots (t'''-t^{(\pi)})$$
$$\text{ꝛc.}$$

3) Bezeichnet man nun das, was aus dem Zähler des Ausdruckes für y durch die Substitution von t′, t″, t‴, ꝛc. für t wird, durch Ω′, Ω″, Ω‴, ꝛc., so erhält man mit Zuziehung der Resultate 2

$$y' = \frac{\Omega'}{(t'-t'') (t'-t''') (t'-t^{IV}) \ldots (t'-t^{(\pi)})}$$
$$y'' = \frac{\Omega''}{(t''-t') (t''-t''') (t''-t^{IV}) \ldots (t''-t^{(\pi)})}$$
$$y''' = \frac{\Omega'''}{(t'''-t') (t'''-t'') (t'''-t^{IV}) \ldots (t'''-t^{(\pi)})}$$
$$\text{ꝛc.}$$

Aus der Form dieser Werthe ist sichtbar, daß wenn $t' = t''$ wird, die Nenner in den Werthen von y' und y'' zu gleicher Zeit $= 0$ werden; woraus sich nach § 143 schließen läßt, daß diese Werthe einzeln nicht mehr durch einen rationalen Ausdruck bestimmt werden können, sondern von einer Gleichung des zweyten Grades abhängen werden. Eben so werden, wenn $t' = t'' = t'''$ gesetzt wird, die Nenner in den Werthen von y', y'', y''', zu gleicher Zeit verschwinden, und es müssen daher alsdann diese Werthe von einer einzigen Gleichung des dritten Grades abhängen; und auf eine ähnliche Art verhält es sich, wenn noch mehrere Werthe von t einander gleich werden.

4) Wir wollen nun zuerst annehmen, die Gleichung II habe nicht mehr als zwey gleiche Wurzeln t', t''. Man sehe dieselben anfangs als ungleich an, und setze, sie wären um eine unendlich kleine Größe h von einander verschieden, so daß $t'' = t' + h$. Man setze ferner, der Kürze wegen,

$$(t' - t''')\,(t' - t^{IV})\,.\,.\,.\,.\,.\,(t' - t^{(\pi)}) = \Pi'$$

$$(t'' - t''')\,(t'' - t^{IV})\,.\,.\,.\,.\,.\,(t'' - t^{(\pi)}) = \Pi''$$

so hat man

$$y' = \frac{\Omega'}{(t' - t'')\,\Pi'} = \frac{\Omega'}{-h\Pi'}$$

$$y'' = \frac{\Omega''}{(t'' - t')\,\Pi''} = \frac{\Omega''}{h\Pi''}$$

und daher

$$y' + y'' = \frac{1}{h}\left[\frac{\Omega''}{\Pi''} - \frac{\Omega'}{\Pi'}\right]$$

5) Läßt man die Unendlichkleinen der zweyten Ordnung weg, so kann man $\Pi'' = \Pi'$ setzen, und man hat daher

$$y' + y'' = \frac{\Omega'' - \Omega'}{h} \cdot \frac{1}{\Pi'}$$

Nach dem Taylorschen Satze ist aber

$$\Omega'' - \Omega' = \frac{d\Omega'}{dt'} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2\Omega'}{dt'^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{rc.}$$

Dividirt man demnach diesen Ausdruck durch h, und setzt hierauf $h = 0$, so erhält man,

$$y' + y'' = \frac{d\Omega'}{dt'} \cdot \frac{1}{\Pi'}$$

6) Wir wollen nun annehmen, die Gleichung II habe drey gleiche Wurzeln, welche t', t'', t''', seyn mögen. Man sehe alsdann wieder wie vorher diese Wurzeln anfangs als um unendlich wenig verschieden an, und setze $t'' = t' + h$, $t''' = t' + k$; ferner setze man

$$(t' - t^{IV})(t' - t^{V})(t' - t^{VI}) \ldots (t' - t^{(\pi)}) = \Pi'_1$$
$$(t'' - t^{IV})(t'' - t^{V})(t'' - t^{VI}) \ldots (t'' - t^{(\pi)}) = \Pi''_1$$
$$(t''' - t^{IV})(t''' - t^{V})(t''' - t^{VI}) \ldots (t''' - t^{(\pi)}) = \Pi'''_1$$

Alsdann hat man (3)

$$y' = \frac{\Omega'}{(t' - t'')(t' - t''')\Pi'_1} = \frac{1}{hk} \cdot \frac{\Omega'}{\Pi'_1}$$

$$y'' = \frac{\Omega''}{(t'' - t')(t'' - t''')\Pi''_1} = \frac{1}{h(h-k)} \cdot \frac{\Omega''}{\Pi''_1}$$

$$y''' = \frac{\Omega'''}{(t''' - t')(t''' - t'')\Pi'''_1} = \frac{1}{k(k-h)} \cdot \frac{\Omega'''}{\Pi'''_1}$$

Addirt man diese drey Resultate, so erhält man,

$$y' + y'' + y''' = \frac{1}{hk} \cdot \frac{\Omega'}{\Pi'_1} + \frac{1}{h(h-k)} \cdot \frac{\Omega''}{\Pi''_1} + \frac{1}{k(k-h)} \cdot \frac{\Omega'''}{\Pi'''_1}$$

oder, wenn man die Unendlichkleinen der dritten Ordnung außer Acht läßt, und $\Pi'''_1 = \Pi''_1 = \Pi'_1$ setzt,

$$y' + y'' + y''' = \frac{1}{\Pi'_1}\left(\frac{\Omega'}{hk} + \frac{\Omega''}{h(h-k)} + \frac{\Omega'''}{k(k-h)}\right).$$

7) Nach dem Taylorschen Satze ist aber

$$\Omega'' = \Omega' + \frac{d'\Omega}{dt'} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2\Omega'}{dt'^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Omega'}{dt'^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$\Omega''' = \Omega' + \frac{d'\Omega}{dt'} \cdot \frac{k}{1} + \frac{d^2\Omega'}{dt'^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3\Omega'}{dt'^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Substituirt man diese Summe im dem Ausdrucke für $y' + y'' + y'''$, und läßt das weg, was sich aufhebt, so erhält man

$$y' + y'' + y''' = \left(\frac{d^2\Omega'}{dt'^2} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{d^3\Omega'}{dt'^3} \cdot \frac{h+k}{1.2.3} + \text{etc.}\right) \frac{1}{\Pi'_1}$$

Wird nun h und $k = 0$ gesetzt, so ergiebt sich

$$y' + y'' + y''' = \frac{d^2\Omega'}{dt'^3} \cdot \frac{1}{1.2\Pi'_1}$$

8) Eben so würde man, wenn vier Wurzeln t', t'', t''', $t^{\prime r}$, der Gleichung II einander gleich wären, wenn man diese Wurzeln anfangs als um unendlich wenig verschieden annähme, und $t'' = t' + h$, $t''' = t + k$, $t^{\prime r} = t' + l$, nach vollendeter Rechnung aber h, k und $l = 0$ setzte folgendes Resultat finden:

$$y' + y'' + y''' + y^{\prime r} = \frac{d^3\Omega'}{dt'^3} \cdot \frac{1}{1.2.3\Pi'_2}$$

wenn

$$(t' - t^{r})(t' - t^{r\prime})(t' - t^{r\prime\prime}) \ldots (t' - t^{(\pi)}) = \Pi'_2$$

gesetzt wird.

9) Hieraus läßt sich nun schon das Gesetz erkennen. Sind nämlich ν Wurzeln t', t'', t''', $t^{\prime r}$, ... $t^{(\nu)}$ einander gleich, so hat man

$$y' + y'' + y''' \ldots\ldots y^{(\nu)} = \frac{d^{\nu-1}\Omega'}{dt'^{\nu-1}} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots\nu-1.\Pi'}$$

wenn man

$$(t' - t^{(\nu+1)})(t' - t^{(\nu+2)}) \ldots\ldots (t' - t^{(\pi)}) = \Pi'$$

setzt.

10) Der Ausdruck Π' enthält die Wurzeln $t^{\nu+1}$, $t^{\nu+2}$, $\ldots\ldots t^{(\pi)}$. Da es sich nun treffen kann, daß man außer der Wurzel t' keine andere Wurzel der Gleichung II kennt, so muß noch gezeigt werden, wie man denselben unmittelbar aus der gedachten Gleichung bestimmen könne.

11) Wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit der Gleichung II hat man, wenn

$$(t-t^{(\nu+1)})(t-t^{(\nu+2)})(t-t^{(\nu+3)})\ldots\ldots(t-t^{(\pi)}) = \Pi$$

gesetzt wird,

$$(t-t')^{\nu}\Pi = t^{\pi} + Pt^{\pi-1} + Qt^{\pi-2} + \text{etc.}$$

Differentiirt man diese Gleichung ν mal hinter einander in Beziehung auf t, und setzt hierauf t' für t, so erhält man (vor. §)

$$1.2.3\ldots\ldots\nu.\Pi' = \frac{d^{\nu}(\pi t'^{\pi} + Pt'^{\pi-1} + Qt'^{\pi-2} + \text{etc.})}{dt'^{\nu}}$$

oder, wenn man einmal wirklich differentiirt

$$1.2.3\ldots\nu.\Pi' = \frac{d^{\nu-1}(\pi t'^{\pi-1} + (\pi-1)Pt'^{\pi-2} + (\pi-2)Qt'^{\pi-3} + \text{etc.})}{dt'^{\nu-1}}$$

12) Substituirt man den Werth von Π', welchen man hieraus ziehet, in 9, so erhält man,

$$y' + y'' + \ldots\ldots + y^{\nu} = \frac{\nu d^{\nu-1}\Omega'}{d^{\nu-1}(\pi t'^{\pi-1} + (\pi-1)Pt'^{\pi-2} + \text{etc.})}$$

die Differentiale in Beziehung auf t' genommen.

13) Man hat also die Summe der den gleichen Wurzeln korrespondirenden Werthe von y gefunden. Auf eben die Art läßt sich aber auch die Summe ihrer Quadrate, ihrer Cuben, u. s. w. finden. Zu dem Ende braucht man nur in den Gleichungen in 3. § 141 für die Funktion y ihr Quadrat y^2, ihren

Cubus y^3, ꝛc. zu substituiren. Da hierdurch bloß die Größen $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{\pi-1}$, eine Aenderung leiden, so hat man weiter nichts zu thun, als den Ausdruck $\Omega = z_{\pi-1} + P' z_{\pi-2} + Q' z_{\pi-3} + \ldots + U' z_0$ dem gemäß abzuändern, übrigens aber die so eben für $y' + y'' + y''' + \ldots + y^{(\nu)}$ gefundene Formel beyzubehalten. Hat man aber diese Summen, so läßt sich auch jedesmal die Gleichung finden, welche die Werthe von $y', y'', y''', \ldots y^{(\nu)}$ zu Wurzeln hat, und diese Gleichung muß man nothwendig auflösen, wenn man die gedachten Werthe finden will.

Anmerk. Aus dem, was hier vorgetragen worden, ergiebt sich nun der Grund, warum in 10. § 135 gesagt wurde, daß es schon hinlänglich sey, die Gleichung für den Coefficienten p aufgelöst zu haben, um die anderen Coefficienten q, r, ꝛc. geradezu, und ohne Auflösung irgend einer andern Gleichung, zu finden. Denn da p, q, r, ꝛc. lauter gleichartige Funktionen von x', x'', x''', ꝛc. sind, so lassen sich aus dem bekannten Zahlenwerthe einer einzigen unter ihnen, die Zahlenwerthe aller übrigen durch bloße rationale Ausdrücke angeben, weil die Fälle, wo die Nenner dieser Ausdrücke verschwinden, zu den Ausnahmen gehören, und nur bey speciellen Gleichungen, nicht aber bey den allgemeinen, mit deren Untersuchung wir es dort zu thun hatten, sich ereignen können.

§ 146.

Des Gebrauches wegen, den man etwa davon machen könnte, will ich nun die im Vorhergehenden gefundenen Resultate hier zusammen stellen, und zu mehrerer Allgemeinheit, anstatt der Funktion y selbst, irgend eine Potenz derselben y^x annehmen.

Bezeichnet man die durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten symmetrischen Funktionen

$$y'^{\varkappa} + y''^{\varkappa} + y'''^{\varkappa} + \ldots + (y^{(\pi)})^{\varkappa}$$
$$t'y'^{\varkappa} + t''y''^{\varkappa} + t'''y'''^{\varkappa} + \ldots + (t^{(\pi)})(y^{(\pi)})^{\varkappa}$$
$$t'^2y'^{\varkappa} + t''^2y''^{\varkappa} + t'''^2y'''^{\varkappa} + \ldots + (t^{(\pi)})^2(y^{(\pi)})^{\varkappa}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t'^{\pi-1}y'^{\varkappa} + t''^{\pi-1}y''^{\varkappa} + t'''^{\pi-1}y'''^{\varkappa} + \ldots + (t^{(\pi)})^{\pi-1}(y^{(\pi)})^{\varkappa}$$

in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, durch z_0, z_1, z_2, ... $z_{\pi-1}$, und setzt man, der Kürze wegen,

$$\pi t'^{\pi-1} + (\pi-1)Pt'^{\pi-2} + (\pi-2)Qt'^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = \Phi'$$
$$z_{\pi-1} + P'z_{\pi-2} + Q'z_{\pi-3} + \ldots\ldots + U'z_0 = \Omega'$$

(worin $P' = t' + P$, $Q' = t'^2 + Pt' + Q$, $R' = t'^3 + Pt'^2 + Qt' + R$, ꝛc.); so hat man für eine einfache Wurzel der transformirten Gleichung für t,

$$y'^{\varkappa} = \frac{\Omega'}{\Phi'};$$

für eine doppelte Wurzel

$$y'^{\varkappa} + y''^{\varkappa} = \frac{2d\Omega'}{d\Phi'};$$

für eine dreifache Wurzel

$$y'^{\varkappa} + y''^{\varkappa} + y'''^{\varkappa} = \frac{3d^2\Omega'}{d^2\Phi'};$$

für eine vierfache Wurzel

$$y'^{\varkappa} + y''^{\varkappa} + y'''^{\varkappa} + y^{IV\varkappa} = \frac{4d^3\Omega'}{d^3\Phi'};$$

und im Allgemeinen für eine ν fache Wurzel

$$y'^{\varkappa} + y''^{\varkappa} + y'''^{\varkappa} + \ldots + (y^{(\nu)})^{\varkappa} = \frac{\nu d^{\nu-1}\Omega'}{d^{\nu-1}\Phi'};$$

sämmtliche Differentiale in Beziehung auf t' genommen.

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich nun die Potenzensummen aller derjenigen Werthe von y finden, welche der

vielfachen Wurzel t' zugehören. Hat man aber diese Potenzensummen, so läßt sich auch nach § 9 die Gleichung finden, von welcher sie abhängen. Ich will nun das Vorgetragene durch ein Beispiel erläutern.

Beysp. Ich will annehmen, man habe die Gleichung

$$\text{I.}\quad x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0$$

um sie aufzulösen, in eine andere

$$\text{II.}\quad t^6 - 9t^5 + 21\,t^4 + 9t^3 - 54t^2 + 32 = 0$$

umgeformt, indem man $t = x' + x''$ setzte. Ich will ferner annehmen, man wäre im Stande, eine Wurzel dieser letzteren Gleichung zu finden, und verlangte nun aus derselben den Werth der Funktion $y = x'x''$ zu bestimmen.

Hier hat man folgende korrespondirende Werthe von t und y

$$x'+x'',\ x'+x''',\ x'+x^{iv},\ x''+x''',\ x''+x^{iv},\ x'''+x^{iv}$$
$$x'x'',\quad x'x''',\quad x'x^{iv},\quad x''x''',\quad x''x^{iv},\quad x'''x^{iv}$$

und diese geben für $x = 1$,

$$z_0 = x'x'' + x'x''' + x'x^{iv} + x''x''' + x''x^{iv} + x'''x^{iv}$$
$$= [1^2]$$
$$z_1 = (x'+x'')x'x'' + (x'+x''')x'x''' + (x+x^{iv})x'x^{iv} + \text{etc.}$$
$$= [12]$$
$$z_2 = (x'+x'')^2x'x'' + (x'+x''')^2x'x''' + (x'+x^{iv})^2x'x^{iv} + \text{etc.}$$
$$= [13] + 2[2^2]$$
$$z_3 = (x'+x'')^3x'x'' + (x'+x''')^3x'x''' + (x'+x^{iv})^3x'x^{iv} + \text{etc.}$$
$$= [14] + 3[23]$$
$$z_4 = (x'+x'')^4x'x'' + (x'+x''')^4x'x''' + (x'+x^{iv})^4x'x^{iv} + \text{etc.}$$
$$= [15] + 4[24] + 6[3^2]$$
$$z_5 = (x'+x'')^5x'x'' + (x'+x''')^5x'x''' + (x'+x^{iv})^5x'x^{iv} + \text{etc.}$$
$$= [16] + 5[25] + 10[34].$$

Nimmt man die Summenausdrücke aus den angehängten Ta-

feln, und setzt hierauf für A, B, C, D, ihre Werthe 3, — 3, — 11, — 6, so findet man $z_0 = -3$, $z_1 = 24$, $z_2 = 90$, $z_3 = 390$, $z_4 = 1512$, $z_5 = 6174$. Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke für Ω', so erhält man, da hier $P' = t' - 9$, $Q' = t'^2 - 9t' + 21$, $R' = t'^3 - 9t'^2 + 21t' + 9$, $S' = t'^4 - 9t'^3 + 21t'^2 + 9t' - 54$, $T' = t'^5 - 9t'^4 + 21t'^3 + 9t'^2 - 54t'$, nach der gehörigen Reduktion:

$$\Omega' = z_5 + P'z_4 + Q'z_3 + R'z_2 + S'z_1 + T'z_0$$
$$= -3t'^5 + 51t'^4 - 189t'^3 + 57t'^2 + 300t'$$

Auch ist

$$\varphi' = 6t'^5 - 45t'^4 + 84t'^3 + 27t'^2 - 108t'$$

folglich

$$y' = \frac{-3t'^5 + 51t'^4 - 189t'^3 + 57t'^2 + 300t'}{6t'^5 - 45t'^4 + 84t'^3 + 27t'^2 - 108t'}$$

Eine Wurzel der Gleichung II ist $t = 1$. Substituirt man diese Wurzel für t' in dem hier gefundenen Werthe von y', so findet man $y' = x'x'' = -6$. Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich überzeugen, wenn man die beyden Gleichungen $x' + x'' = 1$, $x'x'' = -6$ auflöset; denn dadurch erhält man 3 und — 2 für x' und x'', und dieses sind wirklich zwey Wurzeln der Gleichung I.

Eine andere Wurzel der Gleichung II ist $t = 2$; und diese Wurzel für t' in dem Werthe von y' substituirt, giebt $y' = 1$. Aus $x' + x'' = 2$ und $x'x'' = 1$, findet man aber $x' = x'' = 1$; woraus sich ergiebt, daß auch $x = 1$ eine Wurzel der Gleichung I ist, und zwar eine doppelte.

Es ist aber auch $t = 4$ eine Wurzel der Gleichung II. Substituirt man diese Wurzel für t' in dem Werthe von x', so findet man $y' = \frac{0}{0}$; welches anzeigt, daß y' aus t' nicht anders als durch eine Gleichung vom zweyten Grade bestimmt werden könne. Differentiirt man aber Ω' und Φ', so findet man

$$d\Omega' = (-15t'^4 + 204t'^3 - 567t'^2 + 114t' + 300)\,dt'$$
$$d\Phi' = (30t'^4 - 180t'^3 + 252t'^2 + 54t' - 108)\,dt'$$

also

$$y' + y'' = \frac{2d\Omega'}{d\Phi'} =$$

$$2 \cdot \frac{-15t'^4 + 204t'^3 - 567t'^2 + 114t' + 300}{30t'^4 - 180t'^3 + 252t'^2 + 54t' - 108}$$

Setzt man hierin $t' = 4$, so erhält man

$$y' + y'' = 6$$

Um nun y' und y'' einzeln zu bestimmen, muß man noch den Werth von $y'^2 + y''^2$ suchen.

Zu dem Ende setze man $\varkappa = 2$: so hat man

$$z_0 = x'^2x''^2 + \text{rc} = [2^2]$$
$$z_1 = (x'+x'')\,x'^2x''^2 + \text{rc.} = [23]$$
$$z_2 = (x'+x'')^2x'^2x''^2 + \text{rc} = [24] + 2\,[3^2]$$
$$z_3 = (x'+x'')^3\,x'^2x''^2 + \text{rc.} = [25] + 3\,[34]$$
$$z_4 = (x'+x'')^4\,x'^2x''^2 + \text{rc.} = [26] + 4[35] + 6[4^2]$$
$$z_5 = (x'+x'')^5x'^2x''^2 + \text{rc.} = [27] + 5[36] + 10[45]$$

Nimmt man die Summenausdrücke aus den angehängten Tafeln, und setzt hierauf für A, B, C, D, ihre Werthe 3, − 3, − 11, − 6, so findet man $z_0 = 63$, $z_1 = 102$, $z_2 = 336$, $z_3 = 1188$, $z_4 = 4668$, $z_5 = 18492$. Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke für Ω' und setzt man zugleich für P', Q', R', S' T', die oben angegebenen Ausdrücke, so findet man nach der erforderlichen Reduktion

$$\Omega' = z_5 + P'z_4 + Q'z_3 + R'z_2 + S'z_1 + T'z_0$$
$$= 63t'^5 - 465t'^4 + 741t'^3 + 873t'^2 - 1452t' - 1056$$

also

$$d\Omega' = (315t'^4 - 1860t'^3 + 2223t'^2 + 1746t' - 1452)\,dt'$$

die Werthe von Φ' und $d\Phi'$ bleiben die nämlichen wie oben. Man erhält daher

$$y'^2 + y''^2 = 2 \cdot \frac{315t'^4 - 1860\,t'^3 + 2223\,t'^2 + 1746\,t' - 1452}{30\,t'^4 - 180\,t'^3 + 252\,t'^2 + 54\,t' - 108}$$

Setzt man hierin $t' = 4$, so erhält man

$$y'^2 + y''^2 = 18$$

Man hat also nunmehr die beyden Gleichungen

$$y' + y'' = 6,\quad y'^2 + y''^2 = 18,$$

woraus sich ergiebt, daß die beyden Werthe y', y'', von der quadratischen Gleichung

$$y^2 - 6y + 9 = 0$$

abhängen, welche die doppelte Wurzel 3 hat; und es ist daher $y' = y'' = 3$. Daß dieses Resultat richtig sey, erhellet sogleich, wenn man die beyden Gleichungen $x' + x'' = 4$, $x'x'' = 3$, auflöset; denn diese geben 1 und 3 für die Werthe von x' und x'', welches wirklich zwey Wurzeln der Gleichung I sind. Uebrigens läßt sich daraus, daß hier y' von einer Gleichung des zweiten Grades abhängt, die Folgerung ziehen, daß $t = 4$ eine doppelte Wurzel der Gleichung II seyn müsse, welches ebenfalls seine Richtigkeit hat.

Setzt man $t = -1$, welches auch eine doppelte Wurzel der Gleichung II ist, so findet man, wenn in dem obigen Ausdrucke für y', -1 für t' gesetzt wird, $y' = \frac{0}{0}$, wie erfordert wird. Setzt man aber in den beyden für $y' + y''$ und $y'^2 + y''^2$ gefundenen Ausdrücken, -1 für t', so erhält man

$$y' + y'' = -4,\quad y'^2 + y''^2 = 8$$

und es hängen mithin die Werthe von y', y'', von der Gleichung

$$y^2 + 4y + 4 = 0$$

ab,

ab, welche die doppelte Wurzel $y = -2$ hat. Man hat demnach $y' = y'' = -2$. Wenn man aber die beyden Gleichungen $x' + x'' = -1$, $x'x'' = -2$ auflöst, so erhält man für x' und x'' die Werthe 1 und -2, welches wirklich zwey Wurzeln der Gleichung I sind.

Daß man übrigens für y, sowohl für $t = 4$, als für $t = -1$, solche quadratische Gleichungen fand, welche doppelte Wurzeln haben, ist bloß zufällig, und es wird sich dieses nur dann ereignen, wenn den gleichen Werthen von t auch gleiche Werthe von y korrespondiren.

§ 147.

Aufg. Es seyen t und y irgend zwey Funktionen von den Wurzeln einer gegebenen Gleichung: man soll ein allgemeines Verfahren angeben, aus dem bekannten Werthe der einen den Werth der andern zu finden, wie auch die Funktionen beschaffen seyn mögen.

Aufl. 1) Um die Aufgabe in ihrer größten Allgemeinheit aufzulösen, wollen wir annehmen, daß beyde Funktionen die sämmtlichen Wurzeln der gegebenen Gleichung enthalten. Diese Voraussetzung ist immer gestattet; denn enthält eine Funktion nicht alle Wurzeln zugleich, so kann man, wie schon § 48 bemerkt worden, die fehlenden mit dem Coefficienten o hinzufügen. Hätte man z. B. die Funktion $x'x''x'''$, und wäre die gegebene Gleichung vom fünften Grade, so dürfte man nur statt derselben $x'x''x''' + o \cdot x^{IV} + o \cdot x^{V}$ setzen.

2) Das Verfahren § 141 zur Bestimmung der Zahlenwerthe von y aus den für bekannt angenommenen Zahlenwerthen von t, in dem Falle, wo diese beyden Funktionen gleichartig sind, läßt sich auch dann anwenden, wenn sie es nicht sind, wenn man nur die dieserhalb nöthigen Abänderun-

gen macht. Es wurde an dem angeführten Orte gesagt, daß, wenn $t', t'', t''', \ldots t^{(\pi)}$ die ungleichen Formenwerthe von t, und $y', y'', y''', \ldots t^{(\pi)}$ die ungleichen Formenwerthe von y bezeichnen, die Funktion $t'^{\lambda}y' + t''^{\lambda}y'' + t'''^{\lambda}y''' + \ldots \ldots + (t^{(\pi)})^{\lambda}y^{(\pi)}$ symmetrisch sey, weil die Funktion $t^{\lambda}y$ nicht mehr ungleiche Formenwerthe erhalten kann, als die, aus welchen jene Funktion zusammengesetzt ist. Dies hört auf wahr zu seyn, wenn die Funktionen t, y, nicht mehr gleichartig sind, weil dieselben alsdann nicht immer zu gleicher Zeit sich ändern, oder ungeändert bleiben.

3) Die Funktion $t'^{\lambda}y' + t''^{\lambda}y'' + \ldots \ldots + (t^{(\pi)})^{\lambda}y^{(\pi)}$ wird aber, bei jeder nur erdenkbaren Beschaffenheit der Funktionen t, y, gewiß immer symmetrisch werden, wenn man $t'\ t'', t''', \ldots t^{(\pi)}$ und $y', y'', y''', \ldots y^{(\pi)}$ nicht bloß die ungleichen Formenwerthe derselben, sondern überhaupt alle mögliche Werthe, welche aus der Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. entspringen, gleichviel ob gleiche oder ungleiche, bezeichnen läßt. Daß man in gewissen Fällen, und bey gewissen Formen der Funktionen t, y, oft schon mit einer weit geringeren Anzahl dieser Werthe ausreicht, thut nichts zur Sache, weil hier bloß von dem allgemeinen, in jedem Falle anwendbaren Verfahren die Rede ist.

4) Das Verfahren § 142, zur Bestimmung des Zahlenwerthes einer Funktion y aus einem einzigen bekannten Zahlenwerthe von t, läßt sich ebenfalls auf ungleichartige Funktionen ausdehnen, wenn man nur $t', t'', t''', \ldots t^{(\pi)}$ und $y', y'', y''', \ldots y^{(\pi)}$, alle mögliche Formenwerthe von t und y, welche aus den Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. entspringen, bezeichnen läßt, und die transformirte Gleichung II aus den sämmtlichen Formenwerthen von t, und

nicht, wie bisher immer geschehen, allein aus den ungleichen zusammensetzt. Es wird aber diese Gleichung auf die folgende Art gefunden. Ich will annehmen, es gebe unter den π sämmtlichen Formenwerthen μ ungleiche, und daß die Gleichung für diese letzteren $t^{\mu} + pt^{\mu-1} + qt^{\mu-2} + rt^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0$ schon gefunden sey. Setzen wir ferner $\pi = \mu\nu$, so ist ν nothwendig eine ganze Zahl, weil nach § 54. Zus. μ immer ein Submultiplum von π ist, und die π sämmtlichen Formenwerthe werden alsdann zu ν und ν einander gleich seyn. Die Gleichung II, welche, wie jetzt gefordert wird, aus den sämmtlichen Formenwerthen $t', t'', t''', \ldots\ldots t^{(\pi)}$ zusammengesetzt seyn soll, ist also nichts anders als

$$(t^{\mu} + pt^{\mu-1} + qt^{\mu-2} + rt^{\mu-3} + \text{ꝛc.})^{\nu} = 0$$

und sie wird daher erhalten, wenn man diese Gleichung entwickelt. Sind die Formenwerthe $t', t'', t''', \ldots\ldots t^{(\pi)}$ sämmtlich unter einander verschieden, so ist $\nu = 1$, und die Gleichung II ist die Gleichung $t^{\mu} + pt^{\mu-1} + qt^{\mu-2} + \text{ꝛc.} = 0$ selbst.

5) In Hinsicht auf die Gleichung, von welcher der Zahlenwerth der Funktion y abhängen wird, müssen zwey Fälle unterschieden werden; nämlich: 1) der Fall, wo die gegebene Gleichung die allgemeinste ihres Grades ist, und folglich die Coefficienten derselben in gar keiner Verbindung mit einander stehen; 2) der Fall, wo die Coefficienten bestimmte Zahlen sind, oder sonst irgend eine Relation gegen einander haben.

6) Im ersten Falle kann die Gleichung II nur dann lauter ungleiche Wurzeln haben, wenn die Formenwerthe $t', t'', t''', \ldots t^{(\pi)}$ sämmtlich von einander verschieden sind; und findet dies Statt, so läßt sich immer, wie wir im Vorhergehen-

den gesehen haben, der Zahlenwerth von y durch den Zahlenwerth von t rational ausdrücken. Sind aber die gedachten Formenwerthe von t, mithin auch die Wurzeln der Gleichung II zu ν und ν einander gleich, so ist jede dieser Wurzeln eine ν fache, und es hängt also, wenn alle besondere Verhältnisse zwischen den Funktionen t und y noch vorerst beyseit gesetzt werden, der Zahlenwerth von y nothwendig von einer Gleichung des ν ten Grades ab, die sich jedesmal finden läßt (§ 145); und diese Gleichung giebt die ν Werthe von y, welche jener Wurzel korrespondiren, zugleich.

7) In dem zweyten Falle hingegen kann es sich ereignen, daß diese oder jene Wurzel t′ der Gleichung II, außer den ν — 1 gleichen Wurzeln, welche aus der Identität der Formenwerthe entspringen, noch mehrere andere gleiche neben sich hat, die ihren Grund in der besondern Beschaffenheit der gegebenen Gleichung selbst haben, und es wird daher in einem solchen Falle der Zahlenwerth von y, welcher der Wurzel t′ korrespondirt, nothwendig durch eine Gleichung von einem höheren Grade als dem ν ten gegeben seyn müssen.

8) Bisher haben wir bey den allgemeinen Untersuchungen über die Abhängigkeit der Zahlenwerthe der Funktionen t und y auf die besondere Beschaffenheit dieser Funktionen gar keine Rücksicht genommen; es ist nun Zeit auch diese in Erwägung zu ziehen. Wir haben schon im Vorhergehenden gesehen, daß, wenn die gedachten Funktionen gleichartig sind, die Funktion $t'^{\lambda}y' + t''^{\lambda}y'' + \ldots + (t^{(\pi)})^{\lambda}\, y^{(\pi)}$ schon dann symmetrisch wird, wenn man für t', t'', t''', ... $t^{(\pi)}$ bloß die ungleichen Formenwerthe nimmt, wodurch nicht allein die Rechnung um sehr vieles abgekürzt wird, sondern auch in dem Falle, wo die transformirte Gleichung für t gleiche Wurzeln

hat, die Zahlenwerthe von y, welche diesen gleichen Wurzeln korrespondiren, durch niedrigere Gleichungen gegeben werden, als man erhalten haben würde, wenn man die sämmtlichen Formenwerthe von t eingeführt hätte. Eine ähnliche Verkürzung findet aber überhaupt alsdann Statt, wenn die Funktionen t und y von solcher Beschaffenheit sind, daß, wenn die Natur der einen durch die Gleichung

$$A' = A'' = A''' = \dots = A^{(k)} = A^{(k+1)} = \dots = A^{(p)}$$

zwischen den p Typen $A', A'', A''', \dots A^{(k)}, A^{(k+1)}, \dots A^{(p)}$, gegeben ist, die Natur der anderen durch die Gleichung

$$A' = A'' = A''' = \dots = A^{(k)}$$

bloß zwischen den k Typen $A', A'', A''', \dots A^{(k)}$ bestimmt wird. Denn wenn wir alle die ungleichen Typen aufsuchen, die eine Funktion erhalten kann, deren Natur durch die Typengleichung $A' = A'' = A''' = \dots = A^{(k)}$ gegeben ist, und hierauf alle, diesen ungleichen Typen korrespondirende, Formenwerthe der Funktionen t und y suchen; so wird, wenn $t', t'', t''', \dots t^{(\pi)}$ und $y', y'', y''', \dots y^{(\pi)}$ diese Werthe bezeichnen, die Funktion $t'^{\lambda}y' + t''^{\lambda}y'' + \dots + (t^{(\pi)})^{\lambda}y^{(\pi)}$ nothwendig symmetrisch seyn, weil es keinen Formenwerth von $t^{\lambda}y$ geben kann, der sich nicht unter denen befinden sollte, woraus jenes Aggregat zusammengesetzt ist.

9) Was nun die Bildung der transformirten Gleichung für t bey der angenommenen Beschaffenheit der Funktionen t, y, betrifft, so müssen wir die beyden Fälle unterscheiden, wo t, oder wo y diejenige Funktion ist, deren Natur durch die Gleichung $A' = A'' = A''' = \dots = A^{(k)}$ bestimmt wird.

Findet die erste Voraussetzung Statt, so sind die Formenwerthe $t', t'', t''', \ldots t^{(\pi)}$, sämmtlich von einander verschieden, und die Gleichung II, welche aus diesen Formenwerthen gebildet wird, ist wirklich, wie bei gleichartigen Funktionen, nur das Resultat der ungleichen Formenwerthe. Hat aber die zweyte Voraussetzung Statt, so giebt es unter den Formenwerthen $t', t'', t''', \ldots t^{(\ )}$ mehrere gleiche; und es wird, wenn wir die Anzahl der ungleichen darunter, d. h. die Anzahl der ungleichen Formenwerthe, die eine Funktion haben kann, deren Natur durch die Typengleichung $A' = A'' = A''' = \ldots = A^{(P)}$ bestimmt ist, $= \mu$ setzen, die Zahl π ein Vielfaches der Zahl μ seyn. Setzen wir also $\pi = \mu\nu$ und nehmen an, daß $t^{\mu} + pt^{\mu-1} + qt^{\mu-2} +$ ꝛc. $= 0$ die Gleichung sey, welche bloß aus den ungleichen Formenwerthen von t gebildet worden, so wird die Gleichung II, welche aus den Formenwerthen $t', t'', t''', \ldots t^{(\pi)}$ gebildet worden, nichts anders als die Entwickelung der folgenden Gleichung seyn:

$$(t^{\mu} + pt^{\mu-1} + qt^{\mu-2} + \text{ꝛc.})^{\nu} = 0$$

10) Da ferner alsdann jeder Wurzel t der Gleichung II ν Werthe von y korrespondiren, so wird der Zahlenwerth von y nothwendig von einer Gleichung des ten Grades abhängen. Sind die Funktionen t und y gleichartig, so ist $\nu = 1$, und es hängt also dieser Werth bloß von einer Gleichung des ersten Grades ab, wie erfordert wird. Alles dies gilt jedoch nur so lange, als die gegebenen Gleichungen zu den allgemeinen gehören; denn bey besonderen Gleichungen könnte es sich, wie schon oben bemerkt worden, allerdings ereignen, daß die Gleichung für y von einem höheren Grade sey.

11) Außer den in 8 angegebenen Verhältnissen zwischen den Funktionen t, y, giebt es aber noch unzählich viele andere, bey welchen sich die Rechnung ebenfalls vereinfachen läßt. Eine solche Vereinfachung findet überhaupt immer dann Statt, wenn sich aus den sämmtlichen Formenwerthen von t, welche aus allen möglichen Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. entspringen, solche t', t'', t''', ... $t^{(\mu)}$ herausheben lassen, die entweder sämmtlich verschieden sind, oder die Periode der verschiedenen Werthe mehrere Male wiederholt darstellen, und zugleich so beschaffen sind, daß die Funktion $t'^{\lambda}y' + t''^{\lambda}y'' + t'''^{\lambda}y''' + \ldots\ldots + (t^{(\mu)})^{\lambda}y^{(\mu)}$ symmetrisch wird.

12) Obgleich es also Fälle giebt, wo sich die Rechnung vereinfachen läßt, wenn man, anstatt der sämmtlichen Formenwerthe der Funktion t, nur diejenigen braucht, welche die eben angeführten Eigenschaften besitzen, so erwächst doch daraus für die Bestimmung des Werthes von y aus dem Werthe von t, (die größere Weitläufigkeit der Rechnung ausgenommen) kein Nachtheil. Man könnte zwar einwenden, daß alsdann die Gleichung für y auf einen höheren Grad steigen werde, als nöthig wäre, und daß es sich treffen könnte, daß man eine solche Gleichung nicht aufzulösen vermöchte, ungeachtet man vielleicht, bey gehörig angestellter Rechnung, zu einer auflösbaren Gleichung gekommen wäre. Da sich aber alsdann unter den Wurzeln jener Gleichung mehrere finden müssen, welche einander gleich sind, und in der Folge gezeigt werden wird, daß sich eine solche Gleichung immer auf eine andere reduciren lasse, welche nur die ungleichen Wurzeln enthält, also in dem gegenwärtigen Falle die niedrigste rationale Gleichung für y, so hebt sich diese Einwendung von selbst.

§ 148.

Aufg. Es seyen t und y zwey Funktionen von de[n] Wurzeln einer allgemeinen Gleichung irgend eines Gr[a]des: man soll den Grad der Gleichung angeben, du[rch] welche der Zahlenwerth von y aus dem bekannten Za[h]lenwerthe von t bestimmt wird.

Aufl. Man mache in der Funktion t alle Versetzung[en] der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc., für welche der Formenwe[rth] derselben ungeändert bleibt; die nämlichen Versetzungen a[ls] in t mache man auch in der Funktion y. Es sey ν die A[n]zahl der ungleichen Formenwerthe von y, welche man da[]durch erhält; so wird die Gleichung zwischen y und t in Be[]ziehung auf y vom νten Grade seyn. Denn da die gleiche[n] Formenwerthe von t nur einen einzigen Zahlenwerth, die [] ungleichen Formenwerthe von y hingegen ν verschiedene Zah[]lenwerthe haben, folglich ν Zahlenwerthe von y einem einzi[]gen Zahlenwerthe von t zugehören; so können die erstern aus dem letzteren nicht anders als durch eine Gleichung des νten Grades bestimmt werden.

Beysp. I. Es sey in Beziehung auf die allgemeine Glei[]chung des vierten Grades $t = f:(x')(x'')(x''')(x^{IV})$, $y = \varphi:(x')(x'')(x''')(x^{IV})$, und die Natur dieser Funk[]tionen durch die Typengleichungen

$$f:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f:(x'')(x')(x''')(x^{IV}) =$$
$$f:(x')(x'')(x^{IV})(x''') = f:(x''')(x^{IV})(x')(x'')$$
$$\varphi:(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = \varphi:(x'')(x')(x''')(x^{IV})$$
$$= \varphi:(x')(x'')(x^{IV})(x''')$$

gegeben. Suchen wir nun die gleichen Formenwerthe von t auf (§ 54), und machen hierauf die nämlichen Versetzungen

t y, so erhalten wir folgende korrespondirende Werthe von t und y.

f : $(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})$	φ : $(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})$
f : $(x')(x'')(x^{\prime v})(x''')$	φ : $(x')(x'')(x^{\prime v})(x''')$
f : $(x'')(x')(x''')(x^{\prime v})$	φ : $(x'')(x')(x''')(x^{\prime v})$
f : $(x'')(x')(x^{\prime v})(x''')$	φ : $(x'')(x')(x^{\prime v})(x''')$.
f : $(x''')(x^{\prime v})(x')(x'')$	φ : $(x''')(x^{\prime v})(x')(x'')$
f : $(x^{\prime v})(x''')(x')(x'')$	φ : $(x^{\prime v})(x''')(x')(x'')$
f : $(x''')(x^{\prime v})(x'')(x')$	φ : $(x''')(x^{\prime v})(x'')(x')$
f : $(x^{\prime v})(x''')(x'')(x')$	φ : $(x^{\prime v})(x''')(x'')(x')$

Von den acht Werthen von y, welche wir hier erhalten haben, sind aber, wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit dieser Funktion, sowohl die vier ersten, als die vier letzten einander gleich; es gehören also einem einzigen Werthe von t zwey Werthe von y zu. Die Gleichung, welche y durch t giebt, wird daher vom zweyten Grade seyn.

Zu den unendlich vielen Funktionen von der angenommenen Beschaffenheit gehören z. B. folgende: $t = x'x'' + x'''x^{\prime v}$, $y = x'x'' = x'x'' + 0x''' + 0x^{\prime v}$, oder $y = x' + x'' = x' + x'' + 0x''' + 0x^{\prime v}$. Ist also der Zahlenwerth von $x'x'' + x'''x^{\prime v}$ bekannt, so läßt sich daraus der Zahlenwerth sowohl von $x'x''$, als von $x' + x''$, durch die Auflösung einer Gleichung des zweyten Grades finden, welches mit § 40 übereinstimmt, wo wir der Gleichung vom zweyten Grade bloß ausgewichen waren.

Beysp. II. Es sey für irgend eine allgemeine Gleichung $t = x'x''x''' + x^{\prime v}$, $y = x' - x'' = x' - x'' + 0\,(x''' + x^{\prime v})$. Um nun den Grad der niedrigsten rationalen Gleichung zu finden, durch welche y aus t bestimmt werden kann, verfahre man wie folgt:

gleiche Formenwerthe von t	korrespondirende Formenwerthe von y
$x'x''x''' + x^{iv}$	$x' - x'' + o\,(x''' + x^{iv})$
$x'x'''x'' + x^{iv}$	$x' - x''' + o\,(x'' + x^{iv})$
$x''x'x''' + x^{iv}$	$x'' - x' + o\,(x''' + x^{iv})$
$x''x'''x' + x^{iv}$	$x'' - x''' + o\,(x' + x^{iv})$
$x'''x'x'' + x^{iv}$	$x''' - x' + o\,(x'' + x^{iv})$
$x'''x''x' + x^{iv}$	$x''' - x'' + o\,(x' + x^{iv})$

Es gehören also sechs verschiedene Werthe von y einem einzigen Werthe von t zu, nämlich: $x' - x''$, $x' - x'''$, $x'' - x'$, $x'' - x'''$, $x''' - x'$, $x''' - x''$; und es läßt sich daher y aus t nicht anders, als durch eine Gleichung des sechsten Grades bestimmen, wenn ihre Coefficienten rationale Funktionen von t seyn sollen. Da übrigens die Formenwerthe von y zu zwey und zwey einander gleich aber entgegengesetzt sind, so wird diese Gleichung nur gerade Potenzen von y enthalten.

§ 149.

Aufg. Es seyen t, y, zwey beliebige Funktionen von den Wurzeln $x'\ x''\ x'''$ 2c. einer allgemeinen Gleichung: man soll ein Verfahren angeben, die niedrigste Gleichung zu finden, durch welche der Zahlenwerth von y aus dem Zahlenwerthe von t bestimmt wird, unter der Bedingung, daß man nur die ungleichen Formenwerthe von t dazu gebrauchen soll.

Aufl. Man suche, wie im vor. §, die gleichen Formenwerthe von t, und die ihnen korrespondirenden Formenwerthe von y, und hebe aus diesen letztern die ungleichen darunter heraus; sie mögen y', y'', y''', ... $y^{(\nu)}$ heißen: so wird die gesuchte Gleichung vom ν ten Grade seyn, und die gedachten Werthe zu Wurzeln haben. Es sey

$$y^\nu + py^{\nu-1} + qy^{\nu-2} + ry^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

iese Gleichung; so ist $p = y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.}$, $q = y'y'' + y'y''' + y''y''' + \text{ꝛc.}$, $r = y'y''y''' + \text{ꝛc. ꝛc.}$ Da also die Funktionen p, q, r, ꝛc in Hinsicht auf y', y'', y''', ... $y^{(\nu)}$ symmetrisch sind, so werden sie bey denjenigen Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc, für welche die Funktion t ungeändert bleibt, ebenfalls ungeändert bleiben. Bezeichnet man daher die ungleichen Formenwerthe von t durch t', t'' t''', ... $t^{(\pi)}$, so sind $t'^\lambda p'$, $t''^\lambda p''$, $t'''^\lambda p'''$, ... $(t^{(\pi)})^\lambda p^{(\pi)}$ alle mögliche ungleiche Formenwerthe von $t^\lambda p$, und eben so $t'^\lambda q'$, $t''^\lambda q''$, $t'''^\lambda q'''$, ... $(t^{(\pi)})^\lambda q^{(\pi)}$ alle mögliche Formenwerthe von $t^\lambda q$, u. s. w. Ist aber dies, so sind die Funktionen $t'^\lambda p' + t''^\lambda p'' + t'''^\lambda p''' + \ldots\ldots + (t^{(\pi)})^\lambda p^{(\pi)}$, $t'^\lambda q' + t''^\lambda q'' + t'''^\lambda q''' + \ldots + (t^{(\pi)})^\lambda q^{(\pi)}$ u. s. w. nothwendig symmetrisch in Beziehung auf x', x'', x''' ꝛc, und es reichen daher die ungleichen Formenwerthe t', t'', t''', ... $t^{(\pi)}$ zur Bestimmung von p, q, r, ꝛc. hin. Es läßt sich daher das in § 145 gelehrte Verfahren auf die Coefficienten p, q, r, ꝛc. unmittelbar und ohne irgend eine Abänderung anwenden. Wollte man z. B. p bestimmen, so suche man vor allem die transformirte Gleichung für die Funktion t nach dem dritten Capitel; sie sey

$$t^\pi + Pt^{\pi-1} + Qt^{\pi-2} + Rt^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Hat man diese gefunden, so hat man unmittelbar

$$p = \frac{z_{\pi-1} + P'z_{\pi-2} + Q'z_{\pi-3} + \ldots\ldots + U'z_0}{\pi t^{\pi-1} + \pi-1\,.\,Pt^{\pi-2} + \pi-2\,.\,Qt^{\pi-3} + \text{ꝛc.}}$$

worin $P' = t + P$, $Q' = t^2 + Pt + Q$, ꝛc., und das Zeichen von der Form z_k den Zahlenwerth der symmetrischen Funk=

tion $t'^k p' + t''^k p'' + t'''^k p''' + \ldots + (t^{(\pi)})^k p^{(\pi)}$ bezei net. Für die Coefficienten q, r, ꝛc. gilt die nämliche Gleichung und der nämliche Ausdruck, nur muß man unter z_k Zahlenwerthe der Funktionen $t'^k q' + t''^k q'' + t'''^k q''' + \ldots + (t^{(\pi)})^k q^{(\pi)}$, $t'^k r' + t''^k r'' + t'''^k r''' + \ldots$ $(t^{(\pi)})^k r^{(\pi)}$, ꝛc. verstehen.

§ 150.

So lange x', x'', x''', ꝛc., als die Wurzeln einer allgemeinen Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} +$ ꝛc. $= 0$, d. i. einer solchen, worin die Coefficienten A, B, C, ꝛc. unbestimmt sind, angesehen werden, wird man für die Coefficienten p, q, r, ꝛc. immer rationale Funktionen von t finden. Beziehen sich aber diese Wurzeln auf eine specielle Gleichung, so kann es sich, nach der Beschaffenheit der Funktion t, ereignen, daß der gemeinschaftliche Nenner $\pi t^{\pi-1} + \pi-1 \,.\, Pt^{\pi-2} + \pi-2 \,.\, Qt^{\pi-3} +$ ꝛc. in den Ausdrücken für p, q, r, ꝛc., $= 0$ werde, und daß er selbst dann noch $= 0$ bleibe, wenn er mehrere Male differentiirt wird. Nehmen wir nun an, daß $\mu - 1$ Differentiationen nöthig seyn, ehe der Nenner aufhört zu verschwinden, so ergiebt sich aus § 145, daß die Coefficienten p, q, r, ꝛc. von eben so vielen Gleichungen des μten Grades

$$p^\mu + a'p^{\mu-1} + b'p^{\mu-2} + c'p^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$q^\mu + a''q^{\mu-1} + b''q^{\mu-2} + c''q^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$r^\mu + a'''r^{\mu-1} + b'''r^{\mu-2} + c'''r^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

ꝛc.

abhängen werden, die sich nach der daselbst angegebenen Methode immer finden lassen, und worin die Coefficienten a', b', c', ꝛc. a'', b'', c'', ꝛc., a''', b''', c''', ꝛc., sämmtlich rationale Funktionen von t seyn werden.

Alles was in diesem Capitel von der Funktion y gesagt orden, läßt sich auch auf die Funktion x selbst anwenden. Soll nämlich eine Wurzel, etwa x', aus dem bekannten Werhe einer Funktion $t = f: (x') (x'') (x''') \ldots (x^n)$ bestimmt werden, so ist weiter nichts nöthig, als $y = x'$ zu setzen, und übrigens so zu verfahren, wie gelehrt worden.

Man siehet nun den Grund, warum man aus dem bekannten Werthe einer symmetrischen Funktion von den Wurzeln einer Gleichung, wie auch diese Funktion beschaffen seyn mag, doch nie im Stande ist, diese Wurzeln zu bestimmen. Denn da eine solche Funktion bey allen Versetzungen der Wurzeln immer denselben Werth behält, so muß sie nothwendig alle Wurzeln zu gleicher Zeit geben, und man wird daher, man mag es anfangen wie man will, immer wieder eine Gleichung erhalten, welche von der gegebenen nicht verschieden ist.

VIII. Allgemeine Methode zur Auflösung der Gleichungen aller Grade.

§ 151.

In § 140 haben wir gesehen, daß sich die Erfordernisse zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen auf zwey zurückführen lassen; nämlich: 1) auf die Erfindung solcher Funktionen der Wurzeln, wodurch die Gleichung, in welche man die gegebene umgeformt hat, zur Auflösung geschickt wird; und 2) auf die Bestimmung der Wurzeln aus dem bekannten Werthe der angenommenen Funktionen. Mit dem zweyten Erforderniß hatten wir es im vorigen Capitel zu thun; das erste, nebst der Anwendung auf die allgemeine Auflösung der Gleichungen soll der Gegenstand des gegenwärtigen Capitels seyn.

Zur Erleichterung des Druckes und der bequemeren Uebersicht wegen, will ich von nun an aus den Typen den Buchstaben x nebst den überflüssigen Klammern weglassen, und statt der Marken Ziffern setzen; also z. B. f: (12345 . . . . n) anstatt f: $(x') (x'') (x''') (x^{iv}) \ldots (x^{(n)})$, und f: (342651) anstatt f: $(x''') (x^{iv}) (x'') (x^{vi}) (x^{v}) (x')$ schreiben.

§ 152.

Lehrsatz. Wenn man aus der Periode von n Typen $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots\ldots A_\mu \ldots A_\nu \ldots\ldots A_n$, welche sich aus der Gleichung

$$f: (123456 \ldots\ldots \overline{n-1}\, n) = f: (234567 \ldots\ldots n 1)$$

bleiten läßt, irgend zwey A_μ, A_ν, heraushebt, und lle mögliche Typen sucht, welche sich aus der Versetzungs- egel $A_\mu = A_\nu$ ableiten lassen: so wird man eine Periode rhalten, welche in dem Falle, da $\nu - \mu$ und n Primzahlen u einander sind, aus den sämmtlichen n Typen A_1, A_2, A_3, ... A_n, in dem Falle hingegen, da $\nu - \mu$ und n ein gemeinschaftliches Maaß m haben, nur aus $\frac{n}{m}$ dieser Ty- pen bestehen wird. Die Typen, welche man durch die suc- cessive Ableitung erhält, werden in nachstehender Ord- nung auf einander folgen:

$$A_\mu,\ A_\nu,\ A_{2\nu-\mu},\ A_{3\nu-2\mu},\ A_{4\nu-3\mu},\ \text{rc.}$$

so daß die Marken μ, ν, $2\nu - \mu$, $3\nu - 2\mu$, $4\nu - 3\mu$, rc. eine arithmetische Progression mit der Differenz $\nu - \mu$ bilden, wenn man nur aus allen Gliedern dieser Pro- gression, welche größer als n sind, diese Zahl so oft weg- läßt, als es sich thun läßt.

So z. B. giebt die Gleichung

$$f:(12345678) = f:(23456781)$$

die Periode

A_1 ...... f : (12345678)
A_2 ...... f : (23456781)
A_3 ...... f : (34567812)
A_4 ...... f : (45678123)
A_5 ...... f : (56781234)
A_6 ...... f : (67812345)
A_7 ...... f : (78123456)
A_8 ...... f : (81234567)

Vergleicht man diese Typen zu zwey und zwey, so erhält man

Für die Gleichung	Die Periode
$A_1 = A_3$	A_1, A_3, A_5, A_7
$A_1 = A_4$	$A_1, A_4, A_7, A_2, A_5, A_8, A_3, A_6$
$A_1 = A_5$	A_1, A_5
$A_1 = A_6$	$A_1, A_6, A_3, A_8, A_5, A_2, A_7, A_4$
$A_1 = A_7$	A_1, A_7, A_5, A_3
$A_1 = A_8$	$A_1, A_8, A_7, A_6, A_5, A_4, A_3, A_2$
$A_2 = A_3$	$A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_1$
$A_2 = A_4$	A_2, A_4, A_6, A_8
$A_2 = A_5$	$A_2, A_5, A_8, A_3, A_6, A_1, A_4, A_7$
ꝛc.	ꝛc.

Der Grund hiervon ist sehr leicht zu finden, und beruhet auf den Eigenschaften der Zahlen.

Zus. I. Der Satz hat auch alsdann noch seine Richtigkeit, wenn man, anstatt der Typengleichung $A_\mu = A_\nu$ die Typengleichung $A_\nu = A_\mu$ nimmt, wenn man nur in der abnehmenden Progression ν, μ, $2\mu - \nu$, $3\mu - 2\nu$, $4\mu - 3\nu$, $5\mu - 4\nu$, ꝛc., sobald man auf ein negatives Glied oder Null stößt, so vielmal die Zahl n hinzusetzt, bis es positiv wird. So z. B. hat man

Für die Gleichung	Die Periode
$A_2 = A_1$	$A_2, A_1, A_8, A_7, A_6, A_5, A_4, A_3$
$A_3 = A_1$	A_3, A_1, A_7, A_5
$A_4 = A_1$	$A_4, A_1, A_6, A_3, A_8, A_5, A_2, A_7$
$A_5 = A_1$	A_5, A_1
$A_6 = A_1$	$A_6, A_1, A_4, A_7, A_2, A_5, A_8, A_3$
$A_7 = A_4$	A_7, A_1, A_3, A_5
$A_8 = A_1$	$A_8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$
ꝛc.	ꝛc.

Zus. II. Ist daher n eine Primzahl, so erhält man immer wieder dieselbe Periode, welche zwey von den Typen A_1, A_2, A_3, ... A_n man auch einander gleich setzen mag.

§ 153.

Versetzungen von der Art, wie sie im vor. § die Gleichung $A_\mu = A_\nu$, oder $A_\nu = A_\mu$ giebt, sollen cyklische Versetzungen heißen, und die Perioden, welche daraus entstehen, cyklische Perioden.

Das karakteristische Merkmal solcher Versetzungen bestehet darin, daß jede Wurzel um eine Stelle vor- oder rückwärts rückt, und im ersten Falle die letzte die Stelle der ersten, im zweyten Falle aber, die erste die Stelle der letzten einnimmt, so daß eine Art von Kreisbewegung statt findet; wie wenn z. B. eine Anzahl Personen im Kreise stehen, eine der anderen den Rücken zugekehrt, und alle zugleich einen Schritt vor- oder rückwärts thun.

Die Versetzungen sollen auch alsdann noch cyklisch heißen, wenn bloß einige der Wurzeln sich auf die angegebene Art bewegen, die übrigen aber an ihrer Stelle bleiben. So z. B. giebt die Gleichung f: (12345678) = f: (34512678) bloß cyklische Versetzungen zwischen den ersten fünf Wurzeln. Der Satz des vorigen §'s hat auch für diese seine Richtigkeit, wenn man nur für n bloß die Zahl der zu versetzenden Wurzeln nimmt, und die übrigen so ansiehet, als wären sie gar nicht vorhanden.

§ 154.

Lehrsatz. Wenn die Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.} = 0$ durch die Einführung einer Funktion t = f: (12345...n) in eine zweygliedrige Gleichung $t^n - K = 0$ umgeformt worden: so werden die Wurzeln dieser letzteren

Gleichung, $t', t'', t''', \ldots t^{(n)}$ immer die Zahlenwerthe solcher Formenwerthe der Funktion t seyn, welche zusammen genommen eine Periode bilden.

Bew. Die Wurzeln der Gleichung $t^n - K = 0$ lassen sich immer, wie aus dem fünften Capitel bekannt ist, durch $t', \alpha t', \alpha^2 t', \alpha^3 t', \ldots \alpha^{n-1} t'$ ausdrücken, wenn α eine primitive Wurzel der Gleichung $t^n - 1 = 0$ bezeichnet. Es ist daher $t'' = \alpha t'$, $t''' = \alpha t''$, $t^{IV} = \alpha t'''$, ... $t^{(n)} = \alpha t^{(n-1)}$, $t' = \alpha t^{(n)}$. Lassen wir nun $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots A_n$ die Formenwerthe bezeichnen, welche den Wurzeln t', t'', t''', ... $t^{(n)}$ entsprechen, so muß auch seyn $A_2 = \alpha A_1$, $A_3 = \alpha A_2$, $A_4 = \alpha A_3$, ... $A_n = \alpha A_{n-1}$, $A_1 = \alpha A_n$; und da eine jede solche Gleichung $A_\nu = \alpha A_{\nu-1}$, unabhängig von den besondern Werthen, welche man den Wurzeln x', x'', x''', 2c. beylegen mag, wahr seyn muß, so wird sie auch alsdann noch richtig bleiben, wenn man in den beyden Theilen dieser Gleichung die genannten Wurzeln auf irgend eine, aber auf dieselbe Art versetzt, weil dies eben so viel ist, als wenn die Werthe dieser Wurzeln geändert werden. Nehmen wir also an, daß man in $A_{\nu-1}$ die Wurzeln x', x'', x''', 2c. so versetzt habe, daß daraus A_ν werde, und daß durch dieselbe Versetzung A_ν in irgend einen andern Formenwerth A_π übergehe; so hat man auch $A_\pi = \alpha A_\nu$. Nun ist aber auch $A_{\nu+1} = \alpha A_\nu$, folglich ist $A_{\nu+1} = A_\pi$. Hieraus folgt, daß $A_{\nu+1}$ durch dieselbe Versetzung aus A_ν erzeugt wird, als A_ν aus $A_{\nu-1}$; also A_2 aus A_1, wie A_3 aus A_2, wie A_4 aus A_3 u. s. w., endlich wie A_n aus A_{n-1} und A_1 aus A_n. Da also die Formenwerthe A_1, A_2, A_3, A_4, ...A_n alle nach derselben Versetzungsregel von einander abgeleitet worden, und aus der letzten A_n wieder die erste A_1 erhalten wird; so folgt, daß diese n Formenwerthe eine Periode bilden.

§ 155.

Aufg. Unter allen möglichen Funktionen von den Wurzeln x', x'', der allgemeinen Gleichung des zweyten Grades $x^2 - Ax + B = 0$ diejenigen zu finden, welche zur Auflösung derselben geschickt sind; unter der Voraussetzung, daß man keine andere Gleichungen aufzulösen wisse, als die des ersten Grades, und die von der Form $t^2 - K = 0$.

Aufl. 1) Es sey $t = f: (12)$ diejenige Funktion, welche zur Auflösung der gegebenen Gleichung geschickt ist. Da sie zwey Werthe hat, nämlich $f: (12)$, $f: (21)$, so wird die Gleichung für t, allgemein genommen, vom zweyten Grade seyn. Wollte man haben, daß sie nur vom ersten Grade sey, so müßte $f: (12) = f: (21)$ seyn; aber dann würde $f: (12)$ symmetrisch seyn; und es ließen sich aus dem bekannten Werthe von t die Wurzeln x', x'', nicht anders, als durch die Auflösung der gegebenen Gleichung selbst bestimmen (§ 148). Es bleibt mithin nichts anders übrig, als anzunehmen, daß die beyden Formenwerthe $f: (12)$, $f: (21)$, die Wurzeln einer Gleichung von der Form $t^2 - K = 0$ seyen, weil vorausgesetzt worden, daß man keine Gleichung des zweyten Grades von einer andern Form aufzulösen wisse. Daß sie es seyn können, erhellet daraus, daß sie eine Periode bilden (vor. §).

2) Da $K = - t't''$, wenn t', t'', die beyden Wurzeln der Gleichung $t^2 - K = 0$ bezeichnen; so ist auch $K = - f: (12) \times f: (21)$; und da dieses Produkt unverändert bleibt, wenn man x' mit x'' vertauscht, so ist K eine symmetrische Funktion dieser Wurzeln. Es läßt sich daher diese Größe rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken.

3) Da $f: (12)$, $f: (21)$ die Wurzeln der Gleichung $t^2 - K = 0$ seyn sollen, so muß $f: (12) = - f: (21)$ seyn, und dieses ist die einzige Forderung, welche wir zu erfüllen

haben. Denn ist der Zahlenwerth von $t = f: (12)$ einmal gefunden, so lassen sich auch die Wurzeln x', x'', ohne Auflösung irgend einer andern Gleichung bestimmen, weil die Formenwerthe $f: (12)$, $f: (21)$ verschieden sind (§ 143).

4) Dieser Forderung geschieht aber offenbar ein Genüge, wenn man $f: (12) = \varphi: (12) - \varphi: (21)$ setzt, wo es erlaubt ist, für $\varphi: (12)$ jede beliebige Funktion von x', x'', anzunehmen, nur keine symmetrische. Denn aus $f: (12) = \varphi: (12) - \varphi: (21)$ erhält man durch die Vertauschung von x' mit x'', $f: (21) = \varphi: (21) - \varphi: (12)$: mithin $f: (12) = - f: (21)$, wie erfordert wird.

5) Hieraus ergiebt sich, daß alle Funktionen von der Form $\varphi: (12) - \varphi: (21)$ zur Auflösung der gegebenen Gleichung geschickt sind.

§ 156.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des zweyten Grades $x^2 - Ax + B = 0$ wirklich aufzulösen.

Aufl. Wir haben im vor. § gesehen, daß alle Funktionen von der Form $t = \varphi: (12) - \varphi: (21)$ zur Auflösung geschickt sind. Unter der unendlichen Menge von Funktionen, welche man für $\varphi: (12)$ annehmen kann, ist die Wurzel x selbst die einfachste. Man setze daher $\varphi: (12) = x'$, so ist $t = \varphi: (12) - \varphi: (21) = x' - x''$. Die Gleichung $t^2 - K = 0$ giebt aber $K = t^2 = (x' - x'')^2 = x'^2 + x''^2 - 2x'x'' = [2] - 2[1^2] = A^2 - 4B$; die transformirte Gleichung ist also

$$t^2 - (A^2 - 4B) = 0$$

und diese giebt $t = \pm \sqrt{(A^2 - 4B)}$. Man hat also die beyden Gleichungen

$$x' + x'' = A$$

$$x' - x'' = \pm \sqrt{(A^2 - 4B)}$$

und hieraus $x' = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}$, $x'' = \frac{A \mp \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}$, wie erfordert wird.

§ 157.

Aufg. Die Funktionen zu finden, welche zur Auflösung der allgemeinen Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

geschickt sind; unter der Voraussetzung, daß man keine andere Gleichungen aufzulösen wisse, als die vom ersten und zweyten Grade, und die von der Form $t^3 - K = 0$.

Aufl. 1) Es stelle $t = f: (123)$ alle diejenigen Funktionen vor, welche zur Auflösung der gegebenen Gleichung geschickt sind. Da die Wurzeln x', x'', x''', sechs Versetzungen gestatten, so kann die Funktion t sechs Werthe enthalten; und diese sind

$$f: (123), \quad f: (231), \quad f: (312)$$
$$f: (213), \quad f: (132), \quad f: (321)$$

Es wird daher, allgemein genommen, die Gleichung für t vom sechsten Grade seyn.

2) Die sechs Formenwerthe in 1 sind nach cyklischen Perioden geordnet. In der ersten Horizontalreihe befindet sich nämlich die cyklische Periode von $f: (123)$, und in der zweyten die von $f: (213)$. Nehmen wir an, daß die drey Formenwerthe der ersten Periode die Wurzeln der zweygliedrigen Gleichung $t^3 - K = 0$ seyen, so ist K das Produkt dieser drey Wurzeln, und daher $= f: (123) \times f: (231) \times f: (312)$. Es ist aber, wie man leicht einsehen wird, dieses Produkt so beschaffen, daß es bey allen cyklischen Versetzungen zwischen den drey Wurzeln x', x'', x''', ungeändert bleibt: denn macht man diese Versetzungen, so erhält man die Periode

$$f:(123) \times f:(231) \times f:(312)$$
$$f:(231) \times f:(312) \times f:(123)$$
$$f:(312) \times f:(123) \times f:(231)$$

und diese drey Formenwerthe von K sind sichtbar nicht von einander verschieden. Die sechs Formenwerthe von K, welche aus den sämmtlichen Versetzungen der Wurzeln x′, x″, x‴, entspringen, sind demnach zu drey und drey einander gleich, und es hat daher diese Funktion nicht mehr als zwey verschiedene Werthe; und diese sind

$$f:(123) \times f:(231) \times f:(312)$$
$$f.(213) \times f:(132) \times f:(321)$$

von welchen der eine aus dem anderen bloß durch die Vertauschung der Wurzeln x′, x″, abgeleitet werden kann.

3) Da also K nicht mehr als zwey verschiedene Werthe hat, so hängt diese Funktion von keiner höheren Gleichung, als von einer des zweyten Grades ab, und die Wurzeln dieser Gleichung werden diese beyden Werthe seyn. Es läßt sich aber diesen Werthen eine einfachere Form geben; denn da $K = t^2$ und $t = f:(123)$, so ist auch $K = (f:(123))^3$; und da der zweyte Werth aus dem ersten, wie wir in 2 gesehen haben, durch die bloße Vertauschung der Wurzeln x′x″ erhalten wird, so ist $(f:(213))^3$ der zweite Werth von K.

4) Es sey

$$K^2 - pK + q = 0$$

die Gleichung, von welcher die Funktion K abhangt, also p die Summe und q das Produkt der beyden Werthe von K. Es ist demnach

$$p = (f:(123))^3 + (f:(213))^3$$
$$q = (f:(123))^3 \times (f:(213))^3$$

und diese Funktionen p, q, sind so beschaffen, daß sie bey allen Versetzungen der Wurzeln x′, x″, x‴, ungeändert blei-

ben. Da also p und q symmetrische Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', sind, so lassen sie sich jederzeit durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung rational ausdrucken.

5) Wir haben also die transformirte Gleichung für t, welche anfänglich vom sechsten Grade war, auf zwey Gleichungen

$$t^3 - K = o$$
$$K^2 - pK + q = o$$

reducirt; und wir sind jederzeit im Stande die Coefficienten p, q, aus A, B, C, zu bestimmen, wenn die Funktion f: (123) bekannt ist. Hat man aber die Coefficienten p, q, einmal bestimmt, so erhält man durch die Auflösung der zweyten Gleichung die beyden Werthe von K, und wenn diese nach einander in der ersten Gleichung substituirt werden, so erhält man durch die Auflösung derselben die sechs Werthe von t.

6) Da alle Werthe von t von einander verschieden sind, so lassen sich, wie aus dem vorigen Capitel bekannt ist, die Werthe der Wurzeln x', x'', x''', immer aus den gefundenen Werthen der Funktion t geradezu, und ohne Auflösung irgend einer andern Gleichung bestimmen, diese Funktion mag beschaffen seyn, wie sie wolle.

7) Es kommt nunmehr bloß noch darauf an, die Funktion $t = f: (123)$ so zu bestimmen, daß die drey Formenwerthe f: (123), f: (231), f: (312), die Wurzeln einer Gleichung von der Form $t^3 - K = o$ werden. Soll dies geschehen, so müssen diese drey Werthe eine solche Beziehung zu einander haben, daß

$$f: (123) = \alpha f: (231) = \alpha^2 f: (312)$$

sey. Um dies zu bewirken, nehme man willkührlich irgend eine andere Funktion $\varphi: (123)$ an, und setze

$$f: (123) = A\varphi: (123) + B\varphi: (231) + C\varphi: (312)$$

wo A, B, C, für jetzt noch unbestimmte Coefficienten bezeichnen. Aus dieser Gleichung erhält man durch eine gleichmäßige Versetzung der Wurzeln

$$f: (231) = A\varphi: (231) + B\varphi: (312) + C\varphi: (123)$$
$$f: (312) = A\varphi: (312) + B\varphi: (123) + C\varphi: (231)$$

und wenn man diese Werthe in der vorigen Beziehungsgleichung substituirt

$$\begin{aligned} & A\varphi: (123) + B\varphi: (231) + C\varphi: (312) \\ = & \alpha\,(A\varphi: (231) + B\varphi: (312) + C\varphi: (123)) \\ = & \alpha^2\,(A\varphi: (312) + B\varphi: (123) + C\varphi: (231)) \end{aligned}$$

Vergleicht man die Coefficienten von denselben Formenwerthen, so erhält man zur Bestimmung von A, B, C, folgende Gleichungen:

$$A = \alpha C = \alpha^2 B$$
$$B = \alpha A = \alpha^2 C$$
$$C = \alpha B = \alpha^2 A$$

Die erste giebt, da $\alpha^3 = 1$ ist, $B = \alpha A$, $C = \alpha^2 A$, und diese Werthe thun zugleich der zweyten und dritten Genüge. Der Coefficient A bleibt unbestimmt, und man kann ihn daher $= 1$ setzen. Es ist demnach

$$f: (123) = \varphi: (123) + \alpha\varphi: (231) + \alpha^2\varphi: (312)$$

8) Man kann, wie schon oben gesagt worden, für $\varphi: (123)$ jede beliebige Funktion annehmen; jedoch sind diejenigen, welche bey den cyklischen Versetzungen zwischen allen drey Wurzeln ungeändert bleiben, einer andern Ursache wegen, nicht brauchbar. Denn in dem Falle, da $\varphi: (123)$ eine solche Funktion ist, hat man $\varphi: (123) = \varphi: (231) = \varphi: (312)$, und daher $f: (123) = (1 + \alpha + \alpha^2)\,\varphi: (123) = 0$, weil $1 + \alpha$

$+ \alpha^2 = 0$. Es konnte daher diese Einschränkung mit gutem Grunde weggelassen werden, da sie sich von selbst ergiebt.

§ 158.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des dritten Grades $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ wirklich aufzulösen.

Aufl. 1) Im vor. § haben wir gesehen, daß alle Funktionen von der Form $\varphi:(123) + \alpha\varphi:(231) + \alpha^2\varphi:(312)$ zur Auflösung der Gleichungen des dritten Grades geschickt sind. Es giebt also unendlich viele Arten, diese Gleichungen aufzulösen. Die einfachste Voraussetzung, welche man machen kann, ist $\varphi:(123) = x'$; alsdann ist $\varphi:(231) = x''$, $\varphi:(312) = x'''$; also

$$f:(123) = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$$

2) Hieraus erhält man nun

$$(f:(123))^3 = [3] + 6[1^3] +$$
$$3\alpha(x''x'^2 + x'x'''^2 + x'''x''^2) + 3\alpha^2(x'''x'^2 + x'x''^2 + x''x'''^2)$$

und wenn man hierin x' mit x'' vertauscht

$$(f:(213))^3 = [3] + 6[1^3] +$$
$$3\alpha(x'x''^2 + x''x'''^2 + x'''x'^2) + 3\alpha^2(x'''x''^2 + x''x'^2 + x'x'''^2)$$

oder, wenn man, der Kürze wegen, $[3] + 6[1^3] = P$, $x''x'^2 + x'x'''^2 + x'''x''^2 = Q$, $x'''x'^2 + x'x''^2 + x''x'''^2) = R$ setzt,

$$(f:(123))^3 = P + 3\alpha Q + 3\alpha^2 R$$
$$(f:(213))^3 = P + 3\alpha R + 3\alpha^2 Q$$

3) Hieraus erhält man ferner nach 4. des vor. §'s

$$p = (f:(123))^3 + (f:(213))^3$$
$$= 2P + 3(\alpha + \alpha^2)(Q + R)$$

oder, da $\alpha + \alpha^2 = -1$, und $Q + R = [12]$,

$$p = 2[3] + 12[1^3] - 3[12]$$

und, wenn man für die Summenausdrücke ihre Werthe aus den angehängten Tafeln setzt,

$$p = 2A^3 - 9AB + 27C$$

4) Nach dem vor. § ist ferner

$$q = (f:(123))^3 \times (f:(213))^3 =$$
$$(P + 3\alpha Q + 3\alpha^2 R)(P + 3\alpha R + 3\alpha^2 Q)$$
$$= P(P + 3(\alpha + \alpha^2)(Q + R)) + 9(\alpha + \alpha^2)QR + 9(Q^2 + R^2)$$

oder, da $\alpha + \alpha^2 = -1$, $Q + R = [12]$, $QR = [3^2] + 3[2^3] + [1^2 4]$, $Q^2 + R^2 = [24] + 2[123]$

$$q = ([3] + 6[1^3])([3] + 6[1^3] - 3[12])$$
$$+ 9([24] + 2[123] - [3^2] - 3[2^3] - [1^2 4])$$

oder, wenn man für die Summenausdrücke ihre Werthe setzt

$$q = A^6 - 9A^4B + 27A^2B^2 - 27B^3$$
$$= (A^2 - 3B)^3$$

5) Die beyden Gleichungen in 5. des vor. §'s werden demnach

$$t^3 - K = 0$$
$$K^2 - (2A^3 - 9AB + 27C)K + (A^2 - 3B)^3 = 0$$

6) Es seyen K′, K″, die beyden Werthe von K, und t′, t″, die ihnen entsprechenden Werthe von t, so ist

$$t' = f:(123) = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = \sqrt[3]{K'}$$
$$t'' = f:(213) = x'' + \alpha x' + \alpha^2 x''' = \sqrt[3]{K''}$$

Man hat also zur Bestimmung von x′, x″, x‴, die drey Gleichungen

$$x' + x'' + x''' = A$$
$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = \sqrt[3]{K'}$$
$$x'' + \alpha x' + \alpha^2 x''' = \sqrt[3]{K''}$$

Multiplicirt man die dritte Gleichung mit α^2 und addirt sie

hierauf zu den beyden ersten, so erhält man, da $1+\alpha+\alpha^2=0$, nach der Division mit 3

$$x' = \frac{A + \sqrt[3]{K'} + \alpha^2\sqrt[3]{K''}}{3}$$

Multiplicirt man die zweyte mit α^2 und addirt sie hierauf zu den beyden andern, so erhält man

$$x'' = \frac{A + \alpha^2\sqrt[3]{K'} + \sqrt[3]{K''}}{3}$$

Multipliciret man endlich die zwey letzten Gleichungen mit α, und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man

$$x''' = \frac{A + \alpha(\sqrt[3]{K'} + \sqrt[3]{K''})}{3}$$

7) Da aber jede von den beyden Wurzelgrößen $\sqrt[3]{K'}$, $\sqrt[3]{K''}$, drey Werthe hat, nämlich die erste die Werthe $\alpha\sqrt[3]{K'}$, $\alpha^2\sqrt[3]{K'}$, $\alpha^3\sqrt[3]{K'}$, und die zweyte die Werthe $\alpha\sqrt[3]{K''}$, $\alpha^2\sqrt[3]{K''}$, $\alpha^3\sqrt[3]{K''}$, so muß noch erst entschieden werden, welche genommen werden müssen. Ich behaupte nun zuvörderst, daß die beyden Wurzeln $\sqrt[3]{K'}$, $\sqrt[3]{K''}$, immer mit einer und derselben Potenz von α verbunden werden müssen. Denn man setze

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = \alpha^\nu \sqrt[3]{K'}$$

wo der Exponent ν sowohl 1, als 2, als 3 seyn kann. Vertauscht man in dieser Gleichung die Wurzeln x' und x'' mit einander, so erhält man

$$x'' + \alpha x' + \alpha^2 x''' = \alpha^\nu \sqrt[3]{K''}$$

weil alsdann K' in K'', also auch $\sqrt[3]{K'}$ in $\sqrt[3]{K''}$ übergehet. Hieraus ergiebt sich, daß in den beyden letzten der drei Gleichungen, also auch in den daraus gezogenen Resultaten, die

Wurzeln $\sqrt[3]{K'}$, $\sqrt[3]{K''}$, immer mit derselben Potenz von α verbunden werden müssen. Es kommt nun noch darauf an, den Exponenten ν zu bestimmen.

8) Zu dem Ende setze man in den in 6 gefundenen Werthen von x', x'', x''', $\alpha^\nu \sqrt[3]{K'}$ und $\alpha^\nu \sqrt[3]{K''}$ für $\sqrt[3]{K'}$ und $\sqrt[3]{K''}$, so wird

$$x' = \frac{A + \alpha^\nu \sqrt[3]{K'} + \alpha^{\nu+2} \sqrt[3]{K''}}{3}$$

$$x'' = \frac{A + \alpha^{\nu+2} \sqrt[3]{K'} + \alpha^\nu \sqrt[3]{K''}}{3}$$

$$x''' = \frac{A + \alpha^{\nu+1}(\sqrt[3]{K'} + \sqrt[3]{K''})}{3}$$

Da nun diese drey Wurzeln auch herauskommen müssen, wenn anstatt α die andere primitive Wurzel α^2 gesetzt wird, so muß auch

$$x''' = \frac{A + \alpha^{2\nu+2}(\sqrt[3]{K'} + \sqrt[3]{K''})}{3}$$

eine Wurzel seyn. Da sich aber eine solche unter den drey hier angegebenen nicht befindet, so kann keine andere Voraussetzung zulässig seyn, als die, daß $\alpha^{\nu+1} = \alpha^3 = 1$ sey; also $\nu = 2$. Es muß folglich $\alpha^2\sqrt[3]{K'}$, $\alpha^2\sqrt[3]{K''}$, für $\sqrt[3]{K'}$, $\sqrt[3]{K''}$, gesetzt werden. Thut man dieses wirklich, so findet man folgende drey Wurzeln:

$$(A + \sqrt[3]{K'} + \sqrt[3]{K''}) : 3$$

$$(A + \alpha\sqrt[3]{K'} + \alpha^2\sqrt[3]{K''}) : 3$$

$$(A + \alpha^2\sqrt[3]{K'} + \alpha\sqrt[3]{K''}) : 3$$

worin man nur noch nöthig hat für K' und K'' die beyden Wurzeln der zweyten Gleichung in 5 zu setzen.

4) Setzt man zu mehrerer Vereinfachung $A = 0$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$K^2 - 27CK - 27B^3 = 0$$

und die beyden Werthe von K sind

$$27[\tfrac{1}{2}C \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}C^2 + \tfrac{1}{27}B^3)}]$$

Substituirt man diese Werthe in den drey Wurzeln in 3, so erhält man,

$$\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}C + \sqrt{(\tfrac{1}{4}C^2 + \tfrac{1}{27}B^3)}]} + \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}C - \sqrt{(\tfrac{1}{4}C^2 + \tfrac{1}{27}B^3)}]}$$

$$\alpha\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}C + \sqrt{(\tfrac{1}{4}C^2 + \tfrac{1}{27}B^3)}]} + \alpha^2\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}C - \sqrt{(\tfrac{1}{4}C^2 + \tfrac{1}{27}B^3)}]}$$

$$\alpha^2\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}C + \sqrt{(\tfrac{1}{8}C^2 + \tfrac{1}{27}B^3)}]} + \alpha\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}C - \sqrt{(\tfrac{1}{4}C^2 + \tfrac{1}{27}B^3)}]}$$

welches mit der Cardanischen Formel übereinstimmt.

§ 159.

Aufg. Die Funktionen zu finden, welche zur Auflösung der allgemeinen Gleichung des vierten Grades

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

geschickt sind, unter der Voraussetzung, daß man nur die Gleichungen von den niedrigern Graden, und die von der Form $t^4 - K = 0$ aufzulösen wisse.

Aufl. 1) Man ordne die 24 Formenwerthe von f : (1234) nach cyklischen Versetzungen unter und neben einander; (das Funktionszeichen und die Klammern sind, der Kürze wegen, weggelassen)

1 2 3 4	2 3 4 1	3 4 1 2	4 1 2 3
2 3 1 4	3 1 4 2	1 4 2 3	4 2 3 1
3 1 2 4	1 2 4 3	2 4 3 1	4 3 1 2
2 1 3 4	1 3 4 2	3 4 2 1	4 2 1 3
1 3 2 4	3 2 4 1	2 4 1 3	4 1 3 2
3 2 1 4	2 1 4 3	1 4 3 2	4 3 2 1

In der ersten Vertikalkolumne setze man nämlich zuerst f : (1234) mit seinen cyklischen Versetzungen zwischen den drey ersten Wurzeln; dies giebt die cyklische Periode f : (1234), f : (2314), f : (3124). Hierauf setze man f : (2134) ebenfalls mit seinen cyklischen Versetzungen zwischen den drey ersten Wurzeln, so erhält man die Periode f : (2134), f : (1324), f : (3214). Aus dem Formenwerthe f : (1234) leite man ferner durch eine cyklische Versetzung zwischen allen vier Wurzeln die Formenwerthe f : (2341), f : (3412), f : (4123) ab, und schreibe sie neben f : (1234) in eine Horizontalreihe; das Nämliche thue man mit den übrigen fünf Formenwerthen in der ersten Vertikalkolumne, so daß sich in jeder Horizontalreihe eine cyklische Periode befindet.

2) Da die vier Formenwerthe in der ersten Horizontalreihe eine Periode bilden, so können sie die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$t^4 - K = 0$$

seyn (§ 154). Da nun $-K$ das Produkt aller vier Wurzeln ist, so hat man

$$-K = f:(1234) \times f:(2341) \times f:(3412) \times f:(4123)$$

und dieses Produkt ist so beschaffen, daß es bei allen Versetzungen der Wurzeln nicht mehr als folgende sechs verschiedene Werthe erhalten kann:

f : (1234) × f : (2341) × f : (3412) × f : (4123)
f : (2314) × f : (3142) × f : (1423) × f : (4231)
: (3124) × f : (1243) × f : (2431) × f : (4312)
f : (2134) × f : (1342) × f : (3421) × f : (4213)
f : (1324) × f : (3241) × f : (2413) × f : (4132)
f : (3214) × f : (2143) × f : (1432) × f : (4321)

welche bloß aus der Versetzung der drey Wurzeln x', x'', x''', entspringen.

3) Aus der Gleichung $t^4 - K = o$ erhält man $K = t^4 = (f:(1234))^4$. Es muß also auch $(f:(1234))^4$ eine solche Funktion seyn, welche bey den cyklischen Versetzungen zwischen allen vier Wurzeln ungeändert bleibt, und folglich nicht mehr verschiedene Werthe hat, als die, welche aus der Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', entspringen. Es können also die sechs Werthe von K auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$(f:(1234))^4, \ (f:(2314))^4, \ (f:(3124))^4$$
$$(f:(2134))^4, \ (f:(1324))^4, \ (f:(3214))^4$$

4) Da die Funktion K noch sechs verschiedene Werthe hat so hängt dieselbe nothwendig von einer Gleichung des sechsten Grades ab. Soll diese Gleichung auflösbar seyn, so muß sie sich auf solche Gleichungen reduciren lassen, deren Auflösung als bekannt vorausgesetzt worden. Ich will daher annehmen, daß die drey Funktionen $(f:(1234))^4$, $(f:(2314))^4$, $(f:(3124))^4$, welche aus der cyklischen Versetzung zwischen den drey Wurzeln x', x'', x''', entspringen, die Wurzeln einer Gleichung des dritten Grades

$$\text{I.} \quad K^3 - pK^2 + qK - r = o$$

seyen; so können die Coefficienten p, q, r, nicht mehr rational seyn, weil sonst K nicht mehr als drey Werthe haben könnte. Sie müssen daher von gewissen Gleichungen abhängen, die nun gesucht werden sollen.

5) Da $(f:(1234))^4$, $(f:(2314))^4$, $(f:(3124))^4$, die Wurzeln der Gleichung I seyn sollen, so ist

$$p = (f:(1234))^4 + (f:(2314))^4 + (f:(3124))^4$$
$$q = (f:(1234))^4 \times (f:(2314))^4$$
$$+ (f:(1234))^4 \times (f:(3124))^4$$
$$+ (f:(2314))^4 \times (f:(3124))^4$$
$$r = (f:(1234))^4 \times (f:(2314))^4 \times (f:(3124))^4$$

Die Funktionen p, q, r, sind sichtbarlich so beschaffen, daß sie bey den cyklischen Versetzungen zwischen den drey Wurzeln x′, x″, x‴, ungeändert bleiben. Sie bleiben aber auch bey den cyklischen Versetzungen zwischen allen vier Wurzeln x′, x″, x‴, x′ᵛ, ungeändert, weil die Funktionen (f:(1234))⁴, (f:(2314))⁴, (f:(3124))⁴, dadurch ungeändert bleiben (3).

6) Es können also die Funktionen p, q, r, nicht mehr als zwey verschiedene Werthe erhalten, nämlich die, welche aus der bloßen Versetzung der Wurzeln x′, x″, entspringen. Setzt man daher, der Kürze wegen, p = f′:(1234), so hat p nicht mehr als die beyden Werthe f′:(1234), f′:(2134). Es seyen diese beyden Werthe die Wurzeln von folgender Gleichung des zweyten Grades

$$p^2 - p'p + q' = 0$$

so ist

$$p' = f':(1234) \times f':(2134)$$
$$q' = f':(1234) \times f':(2134)$$

Die Funktion p′, q′, sind daher so beschaffen, daß sie bey der Vertauschung von x′ mit x″ ungeändert bleiben. Da sie aber auch bey den cyklischen Versetzungen zwischen den drey Wurzeln x′, x″, x‴, desgleichen bey den cyklischen Versetzungen zwischen allen vier Wurzeln ungeändert bleiben, so sind sie nothwendig symmetrisch, und lassen sich daher durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung rational ausdrücken. Das, was hier von p gesagt worden, läßt sich aber auch von q und r sagen. Es hängen folglich auch diese Coefficienten von Gleichungen des zweyten Grades mit rationalen Coefficienten ab.

7) Es hängt demnach die Funktion t = f : (1234) von der zweygliedrigen Gleichung des vierten Grades

$$t^4 - K = 0$$

ab,

b, und der Coefficient K hängt wieder von der Gleichung es dritten Grades

$$K^3 - pK^2 + qK - r = 0$$

ib, deren Coefficienten p, q, r, durch drey Gleichungen des zweyten Grades

$$p^2 - p'p + q' = 0$$
$$q^2 - p'_1 q + q'_1 = 0$$
$$r^2 - p'_2 r + q'_2 = 0$$

gegeben sind, deren Coefficienten p', q', p'_1, q'_1, p'_2, q'_2, sämmtlich rationale Funktionen von den Coefficienten A, B, C, D, sind.

8) Es kommt nunmehr bloß noch darauf an, die Funktion f: (1234) so zu bestimmen, daß die Formenwerthe f: (1234), f: (2341), f: (3412), f: (4123) die Wurzeln einer Gleichung von der Form $t^4 - K = 0$ seyn können. Soll aber dies seyn, so müssen dieselben eine solche Beziehung gegen einander haben, daß

$$f:(1234) = \alpha f:(2341) = \alpha^2 f:(3412) = \alpha^3 f:(4123)$$

Um nun dieses zu bewirken, setze man, auf eine ähnliche Art, wie in 7. § 157

$$f:(1234) =$$
$$A\varphi:(1234) + B\varphi:(2341) + C\varphi:(3412) + D\varphi:(4123)$$

und leite hieraus die Werthe von f: (2341), f: (3412), f: (4123), ab. Substituirt man hierauf diese Werthe in der vorigen Beziehungsgleichung, so erhält man,

$$A\varphi:(1234) + B\varphi:(2341) + C\varphi:(3412) + D\varphi:(4123)$$
$$= \alpha(A\varphi:(2341) + B\varphi:(3412) + C\varphi:(4123) + D\varphi:(1234))$$
$$= \alpha^2(A\varphi:(3412) + B\varphi:(4123) + C\varphi:(1234) + D\varphi:(2341))$$
$$= \alpha^3(A\varphi:(4123) + B\varphi:(1234) + C\varphi:(2341) + D\varphi:(3412))$$

und wenn man die Coefficienten von denselben Formenwerth[e]
einander gleich setzt,

$$A = \alpha D = \alpha^2 C = \alpha^3 B$$
$$B = \alpha A = \alpha^2 D = \alpha^3 C$$
$$C = \alpha B = \alpha^2 A = \alpha^3 D$$
$$D = \alpha C = \alpha^2 B = \alpha^3 A.$$

Die erste Gleichung giebt $B = \alpha A$, $C = \alpha^2 A$, $D = \alpha^3 A$;
und diese Werthe thun auch der zweyten, dritten und viert[en]
Genüge. Man hat also

$$f:(1234) =$$
$$\varphi:(1234) + \alpha\varphi:(2341) + \alpha^2\varphi:(3412) + \alpha^3\varphi:(4123)$$

§ 160.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des vierten Grades

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

unter den nämlichen Bedingungen, wie in der vorigen
Aufgabe, wirklich aufzulösen.

Aufl. 1) Wir haben im vorigen § gesehen, daß alle
Funktionen von der Form $\varphi:(1234) + \alpha\varphi:(2341) + \alpha^2\varphi:(3412) + \alpha^3\varphi:(4123)$ zur Auflösung geschickt sind.
Setzen wir größerer Einfachheit wegen $\varphi:(1234) = x'$, so ist

$$f:(1234) = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV}$$

oder, wenn man, der Kürze wegen, für α eine der primitiven
Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$, etwa $+\sqrt{-1}$ setzt,

$$f:(1234) = x' - x''' + (x'' - x^{IV})\sqrt{-1}$$

Hieraus erhält man

$$f:(2314) = x'' - x' + (x''' - x^{IV})\sqrt{-1}$$
$$f:(3124) = x''' - x'' + (x' - x^{IV})\sqrt{-1}$$

2) Man hat also nach 5 des vor. §'s

$$p = (x'-x''' + (x''-x^{IV})\sqrt{-1})^4 + (x''-x' + (x'''-x^{IV})\sqrt{-1})^4$$
$$+ (x'''-x'' + (x'-x^{IV})\sqrt{-1})^4$$

$$q = (x'-x''' + (x''-x^{IV})\sqrt{-1})^4 \times (x''-x' + (x'''-x^{IV})\sqrt{-1})^4$$
$$+ (x'-x''' + (x''-x^{IV})\sqrt{-1})^4 \times (x'''-x'' + (x'-x^{IV})\sqrt{-1})^4$$
$$+ (x''-x' + (x'''-x^{IV})\sqrt{-1})^4 \times (x'''-x'' + (x'-x^{IV})\sqrt{-1})^4$$

$$r = (x'-x''' + (x''-x^{IV})\sqrt{-1})^4 \times (x''-x' + (x'''-x^{IV})\sqrt{-1})^4$$
$$\times (x'''-x'' + (x'-x^{IV})\sqrt{-1})^4$$

Die Funktionen p, q, r, sind sichtbarlich so beschaffen, daß jede derselben nur noch einen einzigen verschiedenen Werth erhalten kann, nämlich den, welcher aus dem hier angegebenen entstehet, wenn man x'' für x' und umgekehrt x' für x'' setzt Es hängt also jede dieser Funktionen von einer Gleichung des zweyten Grades ab, die sich nach der aus dem Vorhergehenden schon hinlänglich bekannten Methode finden läßt Da die Sache an sich keine Schwierigkeit hat, die Rechnung aber etwas weitläufig ist, so werde ich mich nicht länger dabey aufhalten.

3) Im vorigen Capitel haben wir gesehen, daß bey zwey gleichartigen Funktionen der Werth der einen aus dem Werthe der anderen immer durch einen rationalen Ausdruck bestimmt werden kann, so lange man es mit den allgemeinen Gleichungen zu thun hat. Es lassen sich daher auch die Werthe von q, r, geradezu aus dem bekannten Werthe von p finden. Da nun p zwey Werthe hat, so lassen sich die Größen p, q, r, auf zweyerlei Art bestimmen. Jede solche Bestimmung giebt eine Gleichung

$$K^3 - pK^2 + qK - r = 0$$

und man erhält also überhaupt sechs Werthe für K. Setzen wir $K = f' : (1234)$, so sind die sechs Formenwerthe, welche jenen Zahlenwerthen korrespondiren, diejenigen, die aus der

Versetzung der ersten drey Wurzeln entspringen (§ 159. 5); also $f':(1234)$, $f':(2314)$, $f':(3124)$, $f':(2134)$, $f':(1324)$, $f':(3214)$, von welchen die drey ersten den dreyen Wurzeln der einen Gleichung für K, und die drey letzten den dreyen Wurzeln der anderen entsprechen.

4) Es seyen K', K'', K''', die drey Wurzeln, welche den Formenwerthen $f':(1234)$, $f':(2314)$, $f':(3124)$ entsprechen. Substituirt man diese Werthe von K in der Gleichung $t^4 - K = 0$, so erhält man für t drey Werthe $\sqrt[4]{K'}$, $\sqrt[4]{K''}$, $\sqrt[4]{K'''}$, und diesen werden daher die Formenwerthe $f:(1234)$, $f:(2314)$, $f:(3124)$ entsprechen. Da nun $f:(1234) = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv}$, so haben wir die Gleichung $x' + x'' + x''' + x^{iv} = A$ mit eingeschlossen, folgende vier Gleichungen:

$$x' + x'' + x''' + x^{iv} = A$$

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} = \sqrt[4]{K'}$$

$$x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x' + \alpha^3 x^{iv} = \sqrt[4]{K''}$$

$$x''' + \alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x^{iv} = \sqrt[4]{K'''}$$

5) Multiplicirt man die drey letzten mit α und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man nach der Division mit 4

$$x^{iv} = \frac{A + \alpha(\sqrt[4]{K'} + \sqrt[4]{K''} + \sqrt[4]{K'''})}{4}$$

und die übrigen Wurzeln x', x'', x''', werden sämmtlich von der Form $aA + b\sqrt[4]{K'} + c\sqrt[4]{K''} + d\sqrt[4]{K'''}$ seyn, wo a, b, c, d, gewisse Funktionen von α bezeichnen, die für jede dieser Wurzeln verschieden ausfällt.

6) Es läßt sich nun auf eine ähnliche Art, wie in 7 § 158 zeigen, daß die Wurzelgrößen $\sqrt[4]{K'}$, $\sqrt[4]{K''}$, $\sqrt[4]{K'''}$, mit

derselben Potenz von α verbunden werden müssen. Denn setzt man

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} = \alpha^\nu \sqrt[4]{K'}$$

so muß auch seyn

$$x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x' + \alpha^3 x^{IV} = \alpha^\nu \sqrt[4]{K''}$$

und

$$x''' + \alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x^{IV} = a^\nu \sqrt[4]{K'''}$$

weil K' bey der ersten Versetzung in K'', und bey der zweyten Versetzung in K''' übergehet, α^ν aber ungeändert bleibt. Ich behaupte nun, daß ν nothwendig $= 3$ seyn müsse, indem sonst α aus dem Werthe von x^{IV} nicht wegfallen würde, und es folglich unter den Wurzeln x', x'', x''', noch eine von der Form der Wurzel x^{IV} geben müßte, weil man für α auch die andere primitive Wurzel der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ setzen könnte. Wir sind daher gewiß, daß

$$x = \frac{A + \sqrt[4]{K'} + \sqrt[4]{K''} + \sqrt[4]{K'''}}{4}$$

eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist; und wir wären auch im Stande die übrigen Wurzeln anzugeben, wenn wir uns die Mühe machen wollten, die vier Gleichungen in 4 aufzulösen.

§ 161.

Aufg. Funktionen zu finden, welche zur Auflösung der allgemeinen Gleichung des fünften Grades

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

geschickt sind, unter der Voraussetzung, daß man keine andere Gleichung als die von niedrigern Graden, und die von der Form $t^5 - K = 0$ aufzulösen wisse.

Aufl. 1) Man ordne die 120 Formenwerthe der Funk-

tion t=f: (12345) nach cyklischen Perioden, wie folgt: (Funktionszeichen und Klammern sind weggelassen)

123 | 45	23451	34512	45123	51234
231 | 45	31452	14523	45231	52314
312 | 45	12453	24531	45312	53124
21345	13452	34521	45213	52134
13245	32451	24513	45132	51324
32145	21453	14532	45321	53214
23415	34152	41623	15234	52341
31425	14253	42531	25314	53142
12435	24351	43512	35124	51243
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
43215	32154	21543	15432	54321

In der ersten Vertikalkolumne befinden sich nämlich die 24 Versetzungen zwischen den vier ersten Wurzeln so unter einander gesetzt, wie sie in 1. § 159 gefunden worden. Die folgenden vier Kolumnen enthalten die cyklischen Versetzungen zwischen allen fünf Wurzeln, und zwar so, daß in jeder Horizontalreihe eine Periode zu stehen kommt.

2) Nach dieser Anordnung lassen sich also die 120 Formenwerthe der Funktion f: (12345) wie folgt erzeugen. Aus den beyden Formenwerthen f: (12345), f: (21345), welche eine Periode von cyklischen Versetzungen zwischen den beyden ersten Wurzeln bilden, leite man durch cyklische Versetzungen zwischen den drey ersten Wurzeln die sechs Formenwerthe, f: (12345) f: (23145), f: (31245), f: (21345), f: (13245), f: (32145) ab. Aus diesen, durch cyklische Versetzungen zwischen den ersten vier Wurzeln, die 24 Formenwerthe, welche sich in der ersten Vertikalkolumne in 1 befinden; und endlich

aus diesen wieder, durch cyklische Versetzungen zwischen allen fünf Wurzeln, die sämmtlichen 120 Formenwerthe.

3) Es seyen die fünf Formenwerthe f: (12345), f: (23451), f: (34512), f: (45123), f: (51234), die Wurzeln der zweygliedrigen Gleichung

$$t^5 - K = 0$$

so ist K das Produkt derselben, also

$$K = f: (12345) \times f: (23451) \times f: (34512) \times f: (45123) \times f: (51234)$$

Setzen wir der Kürze wegen K = f′: (12345), so ist f: (12345) eine solche Funktion, welche bey allen cyklischen Versetzungen zwischen den fünf Wurzeln ungeändert bleibt, weil bey einer jeden solchen Versetzung bloß der eine der fünf Faktoren, woraus er zusammengesetzt ist, in den andern übergehet. Es schließen also die sämmtlichen Werthe von K 24 mal fünf gleiche Werthe in sich, und es kann also diese Funktion nicht mehr als 24 ungleiche Werthe erhalten, und zwar die, welche den 24 Versetzungen in der ersten Vertikalkolumne in 1 entsprechen, d. h. denjenigen, welche aus den ausschließlichen Versetzungen der vier Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, entspringen.

4) Die Gleichung für t, welche, allgemein genommen, vom 120sten Grade ist, wird also schon durch die Einführung der Funktion K auf eine Gleichung vom 24sten Grade reducirt. Jede Wurzel dieser letzteren Gleichung giebt fünf Werthe von t, nämlich $\sqrt[5]{K}$, $\alpha\sqrt[5]{K}$, $\alpha^2\sqrt[5]{K}$, $\alpha^3\sqrt[5]{K}$, $\alpha^4\sqrt[5]{K}$, und also alle 24 Wurzeln zusammen, die sämmtlichen 120 Werthe von t.

5) Da $K = t^5$ und $t = f: (12345)$, so ist auch $K = f': (12345) = f: (12345)^5$. Die 24 Wurzeln der

Gleichung für K sind also nichts anders als die Resultate der Versetzungen der vier ersten Wurzeln in $(f : (12345))^5$. Wir müssen nun diese Gleichung zu erniedrigen suchen.

6) Zu dem Ende will ich annehmen, daß die vier Formenwerthe $f' : (12345)$, $f' : (23415)$, $f' : (34125)$, $f' : (41235)$, welche zusammen eine Periode von cyklischen Versetzungen zwischen den vier ersten Wurzeln bilden, die Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade

$$K^4 - pK^3 + qK^2 - rK + s = 0$$

seyen; alsdann sind die Coefficienten p, q, r, s, symmetrische Funktionen dieser vier Formenwerthe, und sie bleiben daher bey jeder cyklischen Versetzung zwischen den Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, ungeändert, weil bey einer solchen Versetzung bloß der eine dieser Werthe in den andern übergehet. Sie können daher nicht mehr ungleiche Werthe enthalten, als die, welche aus der Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', entspringen, also sechs Werthe. Es hängen demnach die Coefficienten p, q, r, s, nur von Gleichungen des sechsten Grades ab.

7) Da p, q, r, s, gleichartige Funktionen sind, weil sie sich sämmtlich nur dann ändern, wenn die Wurzeln x', x'', x''', unter einander versetzt werden, so ist man jedesmal im Stande, aus dem bekannten Werthe eines dieser Coefficienten, etwa p, die korrespondirenden Werthe der übrigen q, r, s, direkt zu finden (§ 142). Es ist daher schon hinlänglich, die Gleichung für p aufgelößt zu haben. Uebrigens geben die sechs korrespondirenden Werthe von p, q, r, s, sechs solche Gleichungen, wie die in 6; und da jede dieser Gleichungen vier Werthe für K giebt, so geben alle zusammen die 24 Werthe von K.

8) Setzt man $p = f'' : (12345)$, so sind $f'' : (12345)$,

f'': (23145), f'': (31245), f'': (21345), f'': (13245), f'': (32145), die sechs ungleichen Formenwerthe von p, welche zwey Perioden von cyklischen Versetzungen zwischen den drey Wurzeln x', x'' x''', bilden. Ich will nun annehmen, daß die drey Formenwerthe der ersten Periode f'': (12345), f'': (23145), f'': (31245), die Wurzeln einer Gleichung des dritten Grades

$$p^3 - p'p^2 + q'p - r' = 0$$

seyen; so sind p', q', r', symmetrische Funktionen dieser drey Werthe, und bleiben daher bey jeder cyklischen Versetzung zwischen den drey Wurzeln x', x'', x''', ungeändert. Sie können daher nicht mehr als zwey verschiedene Werthe haben, nämlich diejenigen, welche aus der bloßen Vertauschung von x' mit x'' entstehen. Ist übrigens p' gefunden, so lassen sich auch q', r', unmittelbar finden, weil diese drey Funktionen gleichartig sind.

9) Es sey $p' = f'''$: (12345), so sind f''': (12345), f''': (21345) die beyden einzigen ungleichen Formenwerthe dieser Funktion. Nehmen wir daher an, daß sie die Wurzeln der Gleichung

$$p'^2 - p''p' + q'' = 0$$

seyen, so sind p'', q'', symmetrische Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, und lassen sich daher rational durch die Coefficienten A, B, C, D, E, der gegebenen Gleichung ausdrücken.

10) Wir haben also nunmehr die Gleichung für t vom 120sten Grade auf folgende Gleichungen reducirt:

I. $t^3 - K = 0$

II. $K^4 - pK^3 + qK^2 - rK + s = 0$

III. $p^3 - p'p^2 + q'p - r' = 0$

IV. $p'^2 - p''p' + q'' = 0$

Hat man die Gleichung IV gefunden, so erhält man daraus zwey Werthe für p'. Substituirt man einen dieser Werthe von p' in der Gleichung III, und für q', r', die korrespondirenden Werthe, so erhält man durch die Auflösung dieser Gleichung drey Werthe für p. Substituirt man endlich einen dieser Werthe in der Gleichung II, und für q, r, s, die korrespondirenden Werthe, so erhält man vier Werthe von K, und aus einem dieser Werthe den Werth von t.

11) Wir wollen nun untersuchen, wie die Funktion t beschaffen seyn muß, wenn die fünf Formenwerthe $f:(12345)$ $f:(23451)$, $f:(34512)$, $f:(45123)$, $f:(51234)$, die Wurzeln einer Gleichung von der Form $t^5 - K = 0$ seyn sollen; denn dies war die Voraussetzung, von der wir ausgingen. Soll diese Bedingung erfüllt werden, so muß man haben:

$$f:(12345) = \alpha f:(23451) = \alpha^2 f:(34512) = \alpha^3 f:(45123) = \alpha^4 f:(51234)$$

Von dieser Natur sind aber alle Funktionen von der Form

$$\varphi:(12345) + \alpha\varphi:(23451) + \alpha^2\varphi:(34512) + \alpha^3\varphi:(45123) + \alpha^4\varphi:(51234)$$

Es sind daher alle Funktionen von dieser Form zur Auflösung der Gleichung des fünften Grades geschickt, vorausgesetzt, daß man im Stande sey, aus dem bekannten Werthe dieser Funktion die Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, zu bestimmen.

12) Ich behaupte aber, daß diese letztere Voraussetzung immer Statt haben werde, was für eine Funktion man auch für $\varphi:(12345)$ annehmen mag. Denn da t bey jeder cyklischen Versetzung aller Wurzeln seinen Werth ändert, so kann dasselbe höchstens 24 gleiche Werthe haben, nämlich diejenigen, welche sich in der ersten Vertikalkolumne in t befinden. Da sich nun

unter diesen Werthen kein einziger befindet, welcher x^{v} an der ersten Stelle hätte, so können dieselben nur die Wurzeln x', x'', x''', x^{iv}, zugleich geben, die Wurzel x^{v} aber würde sich immer rational aus t bestimmen lassen. Es lassen sich daher die Gleichungen des fünften Grades auf unendlich viele Arten auflösen, und wir werden in der Folge sehen, daß dies überhaupt bey allen Gleichungen der Fall ist.

13) Da $f': (12345) = (f: (12345))^5$, und $p = f': (12345) + f': (23415) + f': (34125) + f': (41235)$, so ist auch, da $p = f'': (12345)$ gesetzt wurde,

$$f'': (12345) = (f: (12345))^5 + (f: (23415))^5 + (f: (34125))^5 + (f: (41235))^5$$

Da ferner $p' = f'': (12345) + f'': (23145) + f'': (31245) = f''': (12345)$, so ist auch, wenn die gehörigen Versetzungen der Wurzeln gemacht werden,

$$\begin{aligned} f''': (12345) = {} & (f: (12345))^5 + (f: (23415))^5 + \\ & (f: (34125))^5 + (f: (41235))^5 + \\ & (f: (23145))^5 + (f: (31425))^5 + \\ & (f: (14235))^5 + (f: (42315))^5 + \\ & (f: (31245))^5 + (f: (12435))^5 + \\ & (f: (24315))^5 + (f: (43125))^5 \end{aligned}$$

Vertauscht man hierin x' mit x'', so erhält man

$$\begin{aligned} f''': (21345) = {} & (f: (21345))^5 + (f: (13425))^5 + \\ & (f: (34215))^5 + (f: (42135))^5 + \\ & (f: (13245))^6 + (f: (32415))^5 + \\ & (f: (24135))^5 + (f: (41325))^5 + \\ & (f: (32145))^5 + (f: (21435))^5 + \\ & (f: (14325))^5 + (f: (13425))^5 \end{aligned}$$

Man siehet hieraus, daß die beyden Funktionen $f''': (12345)$

und $f''': (21345)$ zusammen genommen alle mögliche Werthe von $(f: (12345))^5$, welche aus der Versetzung der vier ersten Wurzeln entspringen, mithin alle ungleichen Werthe dieser Funktion geben. Es ist also, da $p'' = f''': (12345) + f''': (21345)$, p'' eine symmetrische Funktion von x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, die unmittelbar aus der Funktion $(f: (12345))^5$ erhalten wird, wenn man die Summe aller der Werthe dieser Funktion nimmt, welche aus der Versetzung der vier Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, entspringen.

14) Da ferner $q'' = f''': (12345) \times f''': (21345)$, so erhält man unmittelbar die Funktion q'', wenn man das Produkt der beyden für $f''': (12345)$ und $f''': (21345)$ angegebenen Werthe nimmt. Uebrigens ist klar, daß sowohl aus p'' als aus q'' die Wurzel α verschwinden muß, weil sonst t mehr als 120 Werthe erhalten würde.

§ 162.

Aufl. Die allgemeine Gleichung des fünften Grades

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx = E + 0$$

wirklich aufzulösen.

Aufg. 1) Da man für $\varphi: (12345)$ im vor. § jede beliebige Funktion annehmen kann, so will ich, zur Vereinfachung der Rechnung, die Wurzel x selbst dafür annehmen, und $\varphi: (12345) = x'$ setzen. Alsdann ist $\varphi: (23451) = x''$, $\varphi: (34512) = x'''$, $\varphi: (45123) = x^{IV}$, $\varphi: (51234) = x^{V}$; mithin

$$t = f: (12345) = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^{V}$$

und daher

$$(f: (12345))^5 = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^{V})^5$$

welchem Ausdrucke man auch, wie in § 139, die Form

$$(\alpha x^{\prime} + \alpha^{2}x^{\prime\prime} + \alpha^{3}x^{\prime\prime\prime} + \alpha^{4}x^{\prime v} + \alpha^{5}x^{v})^{5}$$

geben kann.

2) Entwickelt man diesen Ausdruck nach den Potenzen von α, so erhält derselbe, aus den in 12. § 138 angegebenen Gründen, die folgende Form:

$$\xi^{\prime} + \xi^{\prime\prime}\alpha + \xi^{\prime\prime\prime}\alpha^{2} + \xi^{\prime v}\alpha^{3} + \xi_{v}\alpha^{4}$$

und zwar ist

$$\xi^{\prime} = [5] + 120[1^{5}] +$$

$$+ 20 \left\{ \begin{array}{c} x^{\prime 3}x^{\prime\prime}x^{v} + x^{\prime 3}x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v} + x^{\prime}x^{\prime\prime 3}x^{\prime\prime\prime} + x^{\prime\prime 3}x^{\prime v}x^{v} + \\ x^{\prime}x^{\prime\prime\prime 3}x^{v} + x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime 3}x^{\prime v} + x^{\prime}x^{\prime\prime}x^{\prime v 3} + x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v 3}x^{v} \\ + x^{\prime}x^{\prime v}x^{v 3} + x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime}x^{v 3} \end{array} \right\}$$

$$+ 30 \left\{ \begin{array}{c} x^{\prime}x^{\prime\prime 2}x^{v 2} + x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime 2}x^{\prime v 2} + x^{\prime 2}x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime 2} + x^{\prime\prime}x^{\prime v 2}x^{v 2} + \\ x^{\prime 2}x^{\prime\prime\prime}x^{v 2} + x^{\prime\prime 2}x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v 2} + x^{\prime 2}x^{\prime\prime 2}x^{\prime v} + x^{\prime\prime\prime 2}x^{\prime v}x^{v 2} \\ + x^{\prime 2}x^{\prime v 2}x^{v} + x^{\prime\prime 2}x^{\prime\prime\prime 2}x^{v} \end{array} \right\}$$

$$\xi^{\prime\prime} =$$

$$5\,(x^{\prime 4}x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime 4}x^{\prime\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime 4}x^{\prime v} + x^{\prime}x^{v 4} + x^{\prime v 4}x^{v})$$

$$+ 10\,(x^{\prime 3}x^{\prime v 2} + x^{\prime 2}x^{\prime\prime\prime 3} + x^{\prime\prime 3}x^{v 2} + x^{\prime\prime 2}x^{\prime v 3} + x^{\prime\prime\prime 2}x^{v 3})$$

$$+ 20 \left(\begin{array}{c} x^{\prime 3}x^{\prime\prime\prime}x^{v} + x^{\prime}x^{\prime\prime 3}x^{\prime v} + x^{\prime}x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v 3} + x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime 3}x^{v} \\ + x^{\prime\prime}x^{\prime v}x^{v 3} \end{array} \right)$$

$$+ 30 \left(\begin{array}{c} x^{\prime 2}x^{\prime\prime 2}x^{v} + x^{\prime}x^{\prime\prime 2}x^{\prime\prime\prime 2} + x^{\prime 2}x^{\prime v}x^{v 2} + x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime 2}x^{\prime v 2} \\ + x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v 2}x^{v 2} \end{array} \right)$$

$$+ 60 \left(\begin{array}{c} x^{\prime 2}x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v} + x^{\prime}x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime}x^{v 2} + x^{\prime}x^{\prime\prime}x^{\prime v 2}x^{v} \\ + x^{\prime}x^{\prime\prime\prime 2}x^{\prime v}x^{v} + x^{\prime\prime 2}x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v}x^{v} \end{array} \right)$$

$$\xi^{\prime\prime\prime} =$$

$$5\,(x^{\prime 4}x^{\prime\prime\prime} + x^{\prime\prime 4}x^{\prime v} + x^{\prime}x^{\prime v 4} + x^{\prime\prime\prime 4}x^{v} + x^{\prime\prime}x^{v 4})$$

$$+ 10\,(x^{\prime 3}x^{\prime\prime 2} + x^{\prime\prime 3}x^{\prime\prime\prime 2} + x^{\prime 2}x^{v 3} + x^{\prime\prime\prime 3}x^{\prime v 2} + x^{\prime v 3}x^{v 2})$$

$$+ 20 \left(\begin{array}{c} x^{\prime 3}x^{\prime v}x^{v} + x^{\prime}x^{\prime\prime 3}x^{v} + x^{\prime}x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime 3} + x^{\prime\prime}x^{\prime\prime\prime}x^{\prime}{}_{v}^{3} \\ + x^{\prime\prime\prime}x^{\prime v}x^{v 3} \end{array} \right)$$

$$+ 30 \left(\begin{matrix} x'^2 x'' x^{IV2} + x'^2 x'''^2 x^{IV} + x' x'''^2 x^{V2} + x''^2 x''' x^{V2} \\ + x''^2 x^{IV2} x^{V} \end{matrix} \right)$$

$$+ 60 \left(\begin{matrix} x'^2 x'' x''' x^{V} + x' x''^2 x''' x^{IV} + x' x'' x^{IV} x^{V2} \\ + x' x''' x^{IV2} x^{V} + x'' x'''^2 x^{IV} x^{V} \end{matrix} \right)$$

$$\xi^{IV} =$$

$$5 \left(x'^4 x^{IV} + x' x'''^4 + x''^4 x^{V} + x'' x^{IV4} + x''' x^{V4} \right)$$

$$+ 10 \left(x'^2 x''^3 + x'^3 x^{V2} + x''^2 x'''^3 + x'''^2 x^{IV3} + x^{IV2} x^{V3} \right)$$

$$+ 20 \left(\begin{matrix} x'^3 x'' x''' + x''^3 x''' x^{IV} + x' x'' x^{V3} + x' x^{IV3} x^{V} \\ + x'''^3 x^{IV} x^{V} \end{matrix} \right)$$

$$+ 30 \left(x'^2 x'''^2 x^{V} + x' x''^2 x^{IV2} + x''^2 x^{IV} x^{V2} \right)$$

$$+ 60 \left(\begin{matrix} x'^2 x'' x^{IV} x^{V} + x'^2 x''' x^{IV} x^{V} + x' x''^2 x''' x^{V} \\ + x' x'' x'''^2 x^{IV} + x' x''' x^{IV} x^{V2} \end{matrix} \right)$$

$$\xi^{V} =$$

$$5 \left(x'^4 x^{V} + x' x''^4 + x'' x'''^4 + x''' x^{IV4} + x^{IV} x^{V4} \right)$$

$$+ 10 \left(x'^3 x'''^2 + x'^2 x^{IV3} + x''^3 x^{IV2} + x''^2 x^{V3} + x'''^3 x^{V2} \right)$$

$$+ 20 \left(\begin{matrix} x'^3 x'' x^{IV} + x' x'''^3 x^{IV} + x''^3 x''' x^{V} + x' x''' x^{V3} \\ + x'' x^{IV3} x^{V} \end{matrix} \right)$$

$$+ 30 \left(\begin{matrix} x'^2 x'' x^{V2} + x' x''^2 x^{V2} + x''^2 x'''^2 x^{IV} \\ + x' x^{IV2} x^{V2} + x'''^2 x^{IV2} x^{V} \end{matrix} \right)$$

$$+ 60 \left(\begin{matrix} x'^2 x''' x^{IV} x^{V} + x' x''^2 x^{IV} x^{V} + x' x'' x'''^2 x^{V} \\ + x' x'' x''' x^{IV2} + x'' x''' x^{IV} x^{V2} \end{matrix} \right)$$

3) Macht man nun in dem Ausdrucke $\xi' + \xi''\alpha + \xi'''\alpha^2 + \xi^{IV}\alpha^3 + \xi^{V}\alpha^4$ alle mögliche Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, und bezeichnet man die Summe aller daraus erhaltener Resultate durch

$$\zeta' + \zeta''\alpha + \zeta'''\alpha^2 + \zeta^{IV}\alpha^3 + \zeta^{V}\alpha^4$$

so findet man

$$\zeta' = 24[5] + 8.\ 20[1^2 3] + 8.\ 30[12^2] + 24.\ 120[1^5]$$
$$\zeta'' = 6.\ 5[14] + 6.\ 10[23] + 4.\ 20[1^2 3] + 4.\ 30[12^2] + 6.\ 60[1^3 2]$$

und für ζ''', ζ^{IV}, ζ^{V}, die nämlichen Werthe als für ζ''. Es ist daher

$$\zeta' + \zeta''\alpha + \zeta'''\alpha^2 + \zeta^{IV}\alpha^3 + \zeta^{V}\alpha^4 =$$
$$\zeta' + \zeta''(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4) = \zeta' - \zeta''$$

weil $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = [1] - 1 = -1$.

4) Nach 13 des vor. §'s ist aber der Coefficient p'' die Summe aller der Formenwerthe von $(f: (12345))^5$, welche aus der Versetzung der vier ersten Wurzeln entspringen; man hat daher auch

$$p'' = \zeta' + \zeta''\alpha + \zeta'''\alpha^2 + \zeta^{IV}\alpha^3 + \zeta^{V}\alpha^4 = \zeta' - \zeta''.$$

Substituirt man nun für ζ', ζ'', ihre gefundenen Werthe, so erhält man

$$p'' = 24[5] - 30[14] - 60[23] + 80[1^2 3] + 120[12^2] - 360[1^3 2] + 2880[1^5]$$

und wenn man für die Summenausdrücke ihre Werthe aus den angehängten Tafeln setzt

$$p'' = 24A^5 - 150A^3B + 150AB^2 + 250A^2C - 250BC - 1250AD + 6250E.$$

5) Auf eine nicht sehr verschiedene Art läßt sich auch der Coefficient q'' finden. Hat man aber p'' und q'', so giebt die Auflösung der Gleichung IV in 10 des vor. §'s den Werth von p'. Hat man p', so lassen sich auch die Coefficienten q', r', der Gleichung III finden; und die Auflösung dieser Gleichung giebt den Werth von p. Aus dem bekannten Werthe von p lassen sich nun wieder die Coefficienten q, r, s, der Gleichung I finden. Die Rechnung würde aber auf diese Art äußerst mühsam und fast unausführ-

bar werden. Ich werde im zweyten Theile dieser Sammlung die Mittel zeigen, sie um ein Bedeutendes abzukürzen, und zugleich die vollständige Auflösung der Gleichungen des fünften sechsten und siebenten Grades geben.

6) Es seyen K', K'', K''', K^{iv}, die vier Wurzeln der Gleichung II, also

$$f': (12345) = K', \quad f': (23415) = K''$$
$$f': (34126) = K''', \quad f': (41235) = K^{iv}$$

Substituirt man K', K'', K''', K^{iv}, für K in der Gleichung I, so erhält man für t vier Werthe $\sqrt[5]{K'}$, $\sqrt[5]{K''}$, $\sqrt[5]{K'''}$, $\sqrt[5]{K^{iv}}$, und diesen entsprechen die Formenwerthe f: (12345), f: (23415), f: (34125), f: (41235); man hat daher

$$f: (12345) = \sqrt[5]{K'}, \quad f: (23415) = \sqrt[5]{K''}$$
$$f: (34125) = \sqrt[5]{K'''}, \quad f: (41235) = \sqrt[5]{K^{iv}}$$

Substituirt man hierin für f: (12345) seinen Werth $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \alpha^4 x^v$, so erhält man, die Gleichung $x' + x'' + x''' + x^{iv} + x^v = A$ mitgerechnet, folgende fünf Gleichungen:

$$x' + x'' + x''' + x^{iv} + x^v = A$$
$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \alpha^4 x^v = \sqrt[5]{K'}$$
$$x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x^{iv} + \alpha^3 x' + \alpha^4 x^v = \sqrt[5]{K''}$$
$$x''' + \alpha x^{iv} + \alpha^2 x' + \alpha^3 x'' + \alpha^4 x^v = \sqrt[5]{K'''}$$
$$x^{iv} + \alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^5 x''' + \alpha^4 x^v = \sqrt[5]{K^{iv}}$$

7) Multiplicirt man die vier letzten Gleichungen mit α, und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man, da $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = [1] = 0$, unmittelbar

$$x = \frac{A + \alpha(\sqrt[5]{K'} + \sqrt[5]{K'} + \sqrt[5]{K'''} + \sqrt[5]{K^{iv}})}{5}$$

und

und die übrigen Wurzeln x', x'', x''', $x^{\prime v}$, werden sämmtlich von der Form $aA + b\sqrt[5]{K'} + c\sqrt[5]{K''} + d\sqrt[5]{K'''} + e\sqrt[5]{K^{\prime v}}$ seyn, wo a, b, c, d, e, gewisse Funktionen von α bezeichnen. Hieraus läßt sich nun, auf eine ähnliche Art, wie bey den Gleichungen des dritten und vierten Grades, schließen, daß

$$x = \frac{A + \sqrt[5]{K'} + \sqrt[5]{K''} + \sqrt[5]{K'''} + \sqrt[5]{K^{\prime v}}}{5}$$

eine Wurzel der gegebenen Gleichung sey.

8) Hat man daher die Gleichung II aufgelöst, so hat man unmittelbar eine Wurzel der gegebenen Gleichung, und die übrigen Wurzeln lassen sich durch die Elimination aus den fünf Gleichungen in 6 bestimmen, wofern man nur nach verrichteter Rechnung $\alpha^4\sqrt[5]{K'}$, $\alpha^4\sqrt[5]{K''}$, $\alpha^4\sqrt[5]{K'''}$, $\alpha^4\sqrt[5]{K^{\prime v}}$ für $\sqrt[5]{K'}$, $\sqrt[5]{K''}$, $\sqrt[5]{K'''}$, $\sqrt[5]{K^{\prime v}}$, setzt.

§ 163.

Aufg. Funktionen zu finden, welche zur Auflösung der allgemeinen Gleichung des sechsten Grades

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex + F = 0$$

geschickt sind, vorausgesetzt, daß man keine andere Gleichungen aufzulösen wisse, als die der niedrigern Grade, und die von der Form $t^6 - K = 0$.

Aufl. 1) Um die $1.2.3.4.5.6 = 720$ Formenwerthe von f: (123456) cyklisch zu ordnen, setze man die 120 Formenwerthe in 1. § 161 in einer Vertikalkolumne unter einander, und füge jedem in der letzten Stelle noch die Wurzel $x^{v\prime}$ bey, so hat man schon 120 Formenwerthe, die sich alle mit $x^{v\prime}$ endigen. Aus jedem derselben leite man nun durch eine cyklische Versetzung zwischen allen sechs Wurzeln noch fünf andere ab, so erhält man 120 Perioden, jede aus sechs

Formenwerthen bestehend, also in allem die 720 Formenwerthe von f: (123456).

2) Ich will nun annehmen, daß die sechs Formenwerthe der ersten Periode f: (123456), f: (234561), f: (345612), f: (456123), f: (561234), f: (612345), die Wurzeln der Gleichung

$$t^6 - K = 0$$

seyen; alsdann ist $-K$ das Produkt aller dieser Wurzeln und mithin

$$-K = f:(123456) \times f:(234561) \times f:(345612) \times f:(456123) \times f:(561234) \times f:(612345)$$

Dieses Produkt bleibt aber offenbar bey jeder cyklischen Versetzung zwischen allen sechs Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, x^{VI}, ungeändert, weil bey jeder solchen Versetzung weiter nichts geschiehet, als daß der eine Faktor in den anderen übergehet; es werden also die 720 Formenwerthe von K zu sechs und sechs einander gleich seyn. Es wird daher K nicht mehr als 120 verschiedene Werthe haben, und diese 120 Werthe werden keine anderen seyn, als die, welche x^{VI} an der letzten Stelle haben, und folglich bloß aus der Versetzung der fünf übrigen Wurzeln entspringen.

2) Da $K = t^6$, und $t = f:(123456)$, so ist auch $K = (f:(123456))^6$. Es kann also auch die Funktion $(f:(123456))^6$ nicht mehr verschiedene Werthe haben, als diejenigen, welche aus der ausschließlichen Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, entspringen. Ich will sie, der Kürze wegen, durch f': (123456) bezeichnen, und annehmen, daß die fünf Formenwerthe f': (123456), f': (234516), f': (345126), f': (451236), f': (512346), welche aus der cyklischen Versetzung zwischen den fünf ersten Wurzeln x',

x'', x''', x'ᵛ, xᵛ, entspringen, die Wurzeln folgender Gleichung des fünften Grades seyen:

$$K^5 - pK^4 + qK^3 - rK^2 + sK - u = 0,$$

so sind p, q, r, s, u, symmetrische Funktionen der genannten Formenwerthe, und bleiben daher bey jeder cyklischen Versetzung zwischen den ersten fünf Wurzeln ungeändert. Da sie aber auch bey den cyklischen Versetzungen zwischen allen sechs Wurzeln ungeändert bleiben, so können sie nicht mehr verschiedene Werthe erhalten, als die, welche aus den ausschließlichen Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', x'ᵛ, entspringen. Es hängt also jede dieser Funktionen nur von einer Gleichung des 24sten Grades ab. Da sie gleichartig sind, so ist es schon hinlänglich, eine dieser Funktionen bestimmt zu haben.

3) Setzt man, der Kürze wegen, p = f'': (123456), so kann f'': (123456) nur dann eine Aenderung leiden, wenn unter den vier ersten Wurzeln eine Versetzung vorgenommen wird. Ich will nun annehmen, es seyen die vier Formenwerthe f'': (123456), f'': (234156), f'': (341256), f'': (412356), die Wurzeln von folgender Gleichung des vierten Grades:

$$p^4 - p'p^3 + q'p^2 - r'p + s' = 0$$

so sind die Coefficienten p', q', r', s', symmetrische Funktionen dieser Formenwerthe, und bleiben daher bey jeder cyklischen Versetzung zwischen den vier ersten Wurzeln ungeändert; und da sie auch bey den cyklischen Versetzungen der fünf ersten und aller sechs Wurzeln ungeändert bleiben, so kann es unter den 720 Formenwerthen derselben nicht mehr als sechs verschiedene geben, nämlich diejenigen, welche aus der ausschließlichen Versetzung der drey ersten Wurzeln x', x'', x''', entspringen.

4) Ich setze $p' = f''' : (123456)$, und nehme an, daß die drey Formenwerthe $f''' : (123456)$, $f''' : (231456)$, $f : (312456)$, die Wurzeln von folgender Gleichung des dritten Grades seyen:

$$p'^3 - p''p'^2 + q''p' - r'' = 0$$

so sind p'', q'', r'', symmetrische Funktionen dieser Formenwerthe, und bleiben daher bey den cyklischen Versetzungen der drey ersten Wurzeln ungeändert; und da sie auch bey den cyklischen Versetzungen der vier und fünf ersten, desgleichen aller sechs Wurzeln ungeändert bleiben, so kann jeder diese Funktionen nicht mehr als zwey verschiedene Werthe haben, nämlich diejenigen, welche aus der Vertauschung der beyden ersten Wurzeln entspringen.

5) Setzen wir daher $p'' = f^{lV} : (123456)$, und nehmen wir an, daß die beyden Formenwerthe $f^{lV} : (123456)$, $f^{lV} : (213456)$, die Wurzeln der Gleichung

$$p''^2 - p'''p'' + q''' = 0$$

seyen, so bleiben die Funktionen p''', q''', bey der Vertauschung der zwey ersten, drey ersten, vier ersten, fünf ersten, und aller sechs Wurzeln ungeändert, sie sind also symmetrisch und lassen sich daher rational durch die Coefficienten A, B, C, D, E, F, der gegebenen Gleichung ausdrücken.

6) Die Gleichung für t, welche anfänglich vom 720sten Grade war, ist demnach durch diese successiven Operationen auf folgende Gleichungen reducirt worden:

I. $t^6 - K = 0$

II. $K^5 - pK^4 + qK^3 - rK^2 + sK - u = 0$

III. $p^4 - p'p^3 + q'p^2 - r'p + s' = 0$

IV. $p'^3 - p''p'^2 + q''p' - r'' = 0$

V. $p''^2 - p'''p'' + q''' = 0$

die so mit einander verbunden sind, daß die Coefficienten einer jeden derselben von der Auflösung aller folgenden Gleichungen abhängen. Die Gleichung V giebt zwey Werthe für p'', also die Gleichung IV sechs Werthe für p', mithin die Gleichung III 24 Werthe für p, und daher die Gleichung II 120 Werthe für K, folglich die Gleichung I 720 Werthe für t.

7) Ist daher die Funktion t so beschaffen, daß die Formenwerthe f: (123456), f: (234561), f: (345612), f: (456123), f: (561234), f: (612345), die Wurzeln der Gleichung $t^6 - K = 0$ seyn können, so ist sie immer zur Auflösung der Gleichung des sechsten Grades geschickt. Hierzu wird aber weiter nichts erfordert, als daß

$$f:(123456) = \alpha f:(234561) = \alpha^2 f:(345612)$$
$$= \alpha^3 f:(456123) = \alpha^4 f:(561234) = \alpha^5 f:(612345)$$

sey, wenn α eine primitive Wurzel der Gleichung $t^6 - 1 = 0$ bezeichnet. Von dieser Natur sind aber alle Funktionen von der Form

$$\varphi:(123456) + \alpha\varphi:(234561) + \alpha^2\varphi:(345612)$$
$$+ \alpha^3\varphi:(456123) + \alpha^4\varphi:(561234) + \alpha^5\varphi:(612345)$$

Es sind demnach alle Funktionen von dieser Natur zur Auflösung der Gleichungen des sechsten Grades geschickt. Man braucht übrigens nicht zu fürchten, daß sich aus diesen Funktionen vielleicht die Wurzeln der gegebenen Gleichung nicht dürften bestimmen lassen: denn da sich die gleichen Formenwerthe von f: (123456), wenn sie etwa welche haben sollte, nur unter denen befinden können, welche $x^{v'}$ an der letzten Stelle haben, so kann $x^{v'}$ nicht unter den Wurzeln begriffen seyn, welche den gleichen Werthen von t = f: (123456) korrespondiren, und es muß sich daher nach dem vorigen Capitel wenigstens diese Wurzel aus dem bekannten Werthe von t durch einen rationalen Ausdruck bestimmen lassen.

§ 164.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des sechsten Grades im vor. § wirklich aufzulösen.

Aufl. 1) Setzt man, der Leichtigkeit wegen, $\varphi: (123456) = x'$, so wird

$$f: (123456) = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^{V} + \alpha^5 x^{VI}$$

Man hat daher

$$f': (123456) = (f: (123456))^6$$
$$= (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^{V} + \alpha^5 x^{VI})^6 =$$
$$\alpha^{-6} (\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + \alpha^5 x^{V} + \alpha^6 x^{VI})^6$$
$$= (\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + \alpha^5 x^{V} + \alpha^6 x^{VI})^6$$

Diese Verwandlung wurde bloß deshalb vorgenommen, um die Marken von x mit den Potenzen von α übereinstimmend zu machen, wodurch die Entwickelung des Polynoms erleichtert wird.

2) Nach 2 des vor. §'s ist f'': (123456) die Summe aller Resultate, welche aus der cyklischen Versetzung der fünf ersten Wurzeln in f': (123456) erhalten werden, also auch die Summe aller Resultate, welche aus der Versetzung der fünf ersten Wurzeln in $(f: (123456))^6$ entspringen. Ferner ist nach 3 des vor. §'s f''': (123456) die Summe aller cyklischen Versetzungen der vier ersten Wurzeln in f'': (123456) also auch die Summe aller cyklischen Versetzungen der vier ersten und der fünf ersten Wurzeln in $(f: (123456))^6$. Nach 4 ist f^{IV}: (123456) die Summe aller cyklischen Versetzungen der drey ersten Wurzeln in f''': (123456), also auch die Summe aller cyklischen Versetzungen der drey ersten, der vier ersten und der fünf ersten Wurzeln in $(f: (123456))^6$. Da nun nach 5, $p''' = f^{IV}: (123456) + f^{IV}: (213456)$;

so ist auch p''' die Summe aller cyklischen Versetzungen der zwey ersten, drey ersten, vier ersten und fünf ersten Wurzeln in $(f: (123456))^6$, folglich die Summe aller der Werthe, welche man aus dieser Funktion durch die Versetzung der fünf ersten Wurzeln erhält.

3) Um daher den Coefficienten p''' zu finden, muß man zuerst die Potenz

$$(\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + \alpha^5 x^V + \alpha^6 x^{VI})^6$$

entwickeln; diese Entwickelung wird, da $\alpha^6 = 1$, $\alpha^7 = \alpha$, $\alpha^8 = \alpha^2$, rc. die folgende Form annehmen

$$\zeta' + \zeta''\alpha + \zeta'''\alpha^2 + \zeta^{IV}\alpha^3 + \zeta^V\alpha^4 + \zeta^{VI}\alpha^5$$

worin ζ', ζ'', ζ''', ζ^{IV}, ζ^V, ζ^{VI}, Funktionen von x', x'', x''', x^{IV}, x^V, x^{VI}, ohne α seyn werden. Macht man hierauf die 120 Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^V, so giebt die Summe aller daraus erhaltenen Resultate den Coefficienten p'''.

4) Multiplicirt man ferner die beyden Funktionen $f''': (123456)$, $f''': (213456)$ mit einander, so erhält man auch den Coefficienten q'''. Die Gleichung V des vor. §'s giebt alsdann den Coefficienten p''; und hat man diesen, so lassen sich nach dem vor. Capitel q'', r'', direkt finden. Die Gleichung IV giebt nun den Coefficienten p', mithin auch q', r', s' und endlich die Gleichung III den Coefficienten p, und somit auch die übrigen Coefficienten der Gleichung II.

5) Es sollen K', K'', K''', K^{IV}, K^V, die fünf Wurzeln der Gleichung II bezeichnen; alsdann sind $\sqrt[6]{K'}$, $\sqrt[6]{K''}$, $\sqrt[6]{K'''}$, $\sqrt[6]{K^{IV}}$, $\sqrt[6]{K^V}$, fünf Werthe von t, und diesen korrespondiren die Formenwerthe $f: (123456)$, $f: (234516)$, $f: (345126)$, $f: (451236)$, $f: (512346)$; man hat also die sechs Gleichungen

$$x' + x'' + x''' + x^{IV} + x^{V} + x^{VI} = A$$
$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^{V} + \alpha^5 x^{VI} = \sqrt[6]{K'}$$
$$x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x^{IV} + \alpha^3 x^{V} + \alpha^4 x' + \alpha^5 x^{VI} = \sqrt[6]{K''}$$
$$x''' + \alpha x^{IV} + \alpha^2 x^{V} + \alpha^3 x' + \alpha^4 x'' + \alpha^5 x^{VI} = \sqrt[6]{K'''}$$
$$x^{IV} + \alpha x^{V} + \alpha^2 x' + \alpha^3 x'' + \alpha^4 x''' + \alpha^5 x^{VI} = \sqrt[6]{K^{IV}}$$
$$x^{V} + \alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + \alpha^5 x^{VI} = \sqrt[6]{K^{V}}$$

6) Hieraus erhält man nun, wenn man die fünf letzten Gleichungen mit α multiplicirt, und sie zur ersten addirt, unmittelbar

$$x^{VI} = \frac{A + \alpha(\sqrt[6]{K'} + \sqrt[6]{K''} + \sqrt[6]{K'''} + \sqrt[6]{K^{IV}} + \sqrt[6]{K^{V}})}{6}$$

und wenn man aus den nämlichen Gründen, wie bey den niedrigern Gleichungen, $\alpha^5\sqrt[6]{K'}$, $\alpha^5\sqrt[6]{K''}$, $\alpha^5\sqrt[6]{K'''}$, $\alpha^5\sqrt[6]{K^{IV}}$, $\alpha^5\sqrt[6]{K^{V}}$ für $\sqrt[6]{K'}$, $\sqrt[6]{K''}$, $\sqrt[6]{K'''}$, $\sqrt[6]{K^{IV}}$, $\sqrt[6]{K^{V}}$, setzt, damit α wegfalle, eine Wurzel der gegebenen Gleichung

$$x = \frac{A + \sqrt[6]{K'} + \sqrt[6]{K''} + \sqrt[6]{K'''} + \sqrt[6]{K^{IV}} + \sqrt[6]{K^{V}}}{6}$$

und die übrigen erhält man durch die Elimination aus den obigen sechs Gleichungen.

§ 165.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des nten Grades

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

aufzulösen.

Aufl. 1) Es sey $t = f:(12345 \ldots . n)$ eine Funktion von der Beschaffenheit, daß die n Formenwerthe, welche aus der cyklischen Versetzung aller n Wurzeln entspringen, die Wurzeln der Gleichung

$$t^n - K = 0$$

seyen. Da alsdann K das Produkt aller dieser Formenwerthe ist, so muß dasselbe bey allen jenen Versetzungen ungeändert bleiben. Es werden daher die 1.2.3.4....n Formenwerthe desselben zu n und n einander gleich seyn. Hieraus folgt, daß K nicht mehr als 1.2.3.4...n—1 verschiedene Werthe haben werde, und daß diese Werthe diejenigen seyn werden, welche aus der ausschließlichen Versetzung der n—1 ersten Wurzeln entspringen.

2) Da also K noch von einer Gleichung des 1.2.3.4....n—1ten Grades abhängt, so muß man diese Gleichung zu erniedrigen suchen. Zu dem Ende setze ich K=f′:(12345....n), und nehme an, daß die n—1 Formenwerthe dieser Funktion, welche aus einer cyklischen Versetzung der n—1 ersten Wurzeln entspringen, die Wurzeln folgender Gleichung seyen:

$$K^{n-1} - pK^{n-2} + qK^{n-3} - rK^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

Alsdann sind die Coefficienten p, q, r, ꝛc. symmetrische Funktionen dieser Formenwerthe, und bleiben daher bey den cyklischen Versetzungen der n—1 ersten Wurzeln ungeändert. Da sie aber auch bey den cyklischen Versetzungen aller n Wurzeln ungeändert bleiben, weil f:(1234....n) dadurch ungeändert bleibt, so können nur diejenigen Werthe derselben verschieden seyn, welche aus der Versetzung der n—2 ersten Wurzeln entspringen. Es hat demnach jeder dieser Coefficienten nur noch 1.2.3.4....n—2 verschiedene Werthe, und es hängt mithin jeder derselben nur noch von einer Gleichung des 1.2.3.4....n—2 ten Grades ab.

3) Da es schon hinlänglich ist, p gefunden zu haben, weil p, q, r, ꝛc. gleichartige Funktionen sind, so will ich p = f″:(12345...n) setzen, und annehmen, daß die n—2 Formenwerthe dieser Funktien, welche aus einer cyklischen

Versetzung der n — 2 ersten Wurzeln entspringen, die Wurzeln der Gleichung

$$p^{n-2} - p' p^{n-3} + q' p^{n-4} - r' p^{n-5} + \text{rc.} = 0$$

seyen; alsdann sind p′, q′, r′, rc. symmetrische Funktionen dieser Werthe, und sie bleiben daher bey den cyklischen Versetzungen sowohl der n — 2, als der n — 1 ersten Wurzeln, wie auch aller n Wurzeln ungeändert. Es haben demnach diese Coefficienten nur noch 1 . 2 . 3 . 4 . . . . n—3 verschiedene Werthe, nämlich diejenigen, welche aus der Versetzung der n—3 ersten Wurzeln entspringen, und sie hängen demnach nur noch von Gleichungen des 1 . 2 . 3 . 4 . . . . n—3ten Grades ab.

4) Auf eine ähnliche Art bilde man nach und nach die Gleichungen

$$p'^{n-3} - p'' p'^{n-4} + q'' p'^{n-5} - r'' p'^{n-6} + \text{rc.} = 0$$
$$p''^{n-4} - p''' p''^{n-5} + q''' p''^{n-6} - r''' p''^{n-7} + \text{rc.} = 0$$
$$p'''^{n-6} - p^{IV} p'''^{n-6} + q^{IV} p'''^{n-7} - r^{IV} p'''^{n-8} + \text{rc.} = 0$$

rc.

nämlich die erste aus der cyklischen Periode der n—3 ersten Wurzeln der Funktion $p' = f''' : (1234 \ldots, n)$, die zweyte aus der cyklischen Periode der n—4 ersten Wurzeln der Funktion $p'' = f^{IV} : (1234 \ldots, n)$, die dritte aus der cyklischen Periode der n — 5 ersten Wurzeln der Funktion $p''' = f^{V} : (1234 \ldots n)$, u. s. w. Hiermit fahre man so lange fort, bis man auf die Gleichung des zweyten Grades

$$(p^{(n-4)})^2 - p^{(n-3)} p^{(n-4)} + q^{(n-3)} = 0$$

kommt; so werden $p^{(n-3)}$, $q^{(n-3)}$, solche Funktionen von x', x'', x''', ... $x^{(n)}$ seyn, welche sowohl bey den cyklischen Versetzungen aller n Wurzeln, als auch bey den cyklischen Versetzungen der n — 1 ersten, der n — 2 ersten, der n — 3 ersten, u. s. w., wie auch der beyden ersten Wurzeln

ungeändert bleiben. Sie bleiben daher bey allen Versetzungen der Wurzeln ungeändert, und sind folglich symmetrisch. Sie lassen sich demnach durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung rational ausdrücken.

5) Man hat also eine Folge von Gleichungen

$$t^n - K = 0$$
$$K^{n-1} - pK^{n-2} + qK^{n-3} - rK^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$p^{n-2} - p'p^{n-3} + q'p^{n-4} - r'p^{n-5} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$p'^{n-3} - p''p'^{n-4} + q''p'^{n-5} - r''p'^{n-6} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(p^{(n-4)})^2 - p^{(n-3)}p^{(n-4)} + q^{(n-3)} = 0$$

die so mit einander verbunden sind, daß der erste Coefficient einer jeden von allen folgenden abhängt. Sind aber die ersten Coefficienten p, p', p'', p''', ꝛc. gefunden, so lassen sich nach dem vorigen Capitel auch die übrigen q, r, ꝛc. q', r', ꝛc. q'', r'', ꝛc. ꝛc. finden.

6) Es kommt nunmehr bloß noch darauf an, für $t = f:(12345 \ldots n)$ eine solche Funktion anzunehmen, die so beschaffen ist, daß die Formenwerthe derselben, welche aus der cyklischen Versetzung aller n Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. entspringen, die Wurzeln einer Gleichung von der Form $t^n - K = 0$ seyn können. Zu dem Ende nehme man irgend eine andere Funktion $z = \varphi:(12345 \ldots x)$ nach Willkühr an. Es sollen z', z'', z''', z^{IV}, ... $z^{(n)}$ die Formenwerthe von z bezeichnen, welche aus der cyklischen Versetzung aller n Wurzeln entspringen, und α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$: ich behaupte, daß alsdann immer

$$t = z' + \alpha z'' + \alpha^2 z''' + \alpha^3 z^{IV} + \ldots + \alpha^{n-1} z^{(n)}$$

eine Funktion von der verlangten Beschaffenheit seyn werde. Denn da in dieser Funktion bey jeder cyklischen Versetzung der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc., die Formenwerthe z', z'', z''',

z^{IV}, ... $z^{(n)}$ ebenfalls cyklisch versetzt werden, indem dadurch z' in z'', z'' in z''', z''' in z^{IV}, u. s. w., endlich $z^{(n)}$ in z' übergehet, so erhält die Funktion t bey den cyklischen Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. folgende Werthe:

$$t' = z' + \alpha z'' + \alpha^2 z''' + \alpha^3 z^{IV} + \ldots + \alpha^{(n-1)} z^{(n)}$$
$$t'' = z'' + \alpha z''' + \alpha^2 z^{IV} + \alpha^3 z^{V} + \ldots + \alpha^{(n-1)} z'$$
$$t''' = z''' + \alpha z^{IV} + \alpha^2 z^{V} + \alpha^3 z^{VI} + \ldots + \alpha^{(n-1)} z''$$
$$t^{IV} = z^{IV} + \alpha z^{V} + \alpha^2 z^{VI} + \alpha^3 z^{VII} + \ldots + \alpha^{(n-1)} z'''$$

ꝛc.

und man siehet sogleich, daß $t'' = \alpha^{n-1} t'$, $t''' = \alpha^{n-2} t'$, $t^{IV} = \alpha^{n-3} t'$, u. s. w. Es haben daher die Funktionen t', t'', t''', ꝛc. gerade die Verhältnisse, welche sie haben müssen, um die Wurzeln einer Gleichung von der Form $t^n - K = 0$ seyn zu können.

7) Daß sich aber auch jedesmal aus dem bekannten Werthe der Funktion $z' + \alpha z'' + \alpha^2 z''' + \alpha^3 z^{IV} + \ldots + \alpha^{n-1} z^{(n)}$ der Werth der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. werde bestimmen lassen, die Funktion z sey welche sie wolle, erhellet daraus, daß den gleichen Werthen jener Funktion, wenn sie deren haben sollte, doch nie die Wurzel $x^{(n)}$ entsprechen kann, weil sich diese gleichen Werthe nothwendig unter denen befinden müssen, welche aus der Versetzung der $n - 1$ Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, ... $x^{(n-1)}$ entspringen. Es wird sich also wenigstens immer diese eine Wurzel aus dem bekannten Werthe von t, ohne Auflösung irgend einer Gleichung, bestimmen lassen. Alsdann lassen sich aber auch die übrigen finden, wenn die Auflösung der Gleichungen unter dem nten Grade vorausgesetzt wird.

8) Es lassen sich daher alle Gleichungen auf unendlich viele Arten auflösen. Setzt man, um die Rechnung einfacher zu machen, $z = x$, so hat man

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \ldots + \alpha^{n-1} x^{(n)}$$

Hieraus erhält man unmittelbar

$$K = t^n = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots + \alpha^{n-1} x^{(n)})^n$$

9) Um nun die gegebene Gleichung wirklich aufzulösen, müssen wir vor allem die Coefficienten $p^{(n-3)}$, $q^{(n-3)}$, der letzten reducirten Gleichung in 4 zu bestimmen suchen. Da p die Summe der $n-1$ Formenwerthe von K ist, welche aus der cyklischen Versetzung der $n-1$ ersten Wurzeln entspringen, und p' wieder die Summe aller der Formenwerthe von p, welche aus der cyklischen Versetzung der $n-2$ ersten Wurzeln entspringen; so ist auch p' die Summe der $n-1 . n-2$ Formenwerthe von K, welche aus der cyklischen Versetzung der $n-1$ und der $n-2$ ersten Wurzeln entspringen. Da ferner p'' die Summe der $n-3$ Formenwerthe von p' ist, welche aus der cyklischen Versetzung der $n-3$ ersten Wurzeln entspringen, so ist auch p'' die Summe der $n-1 . n-2 . n-3$ Formenwerthe von K, welche aus der cyklischen Versetzung der $n-1$, der $n-2$ und der $n-3$ ersten Wurzeln entspringen. Schließt man auf diese Art weiter, so findet man, daß der Coefficient $p^{(n-3)}$ die Summe aller der $n-1 . n-2 . n-3 \ldots 3 . 2$ Formenwerthe von K sey, welche aus der cyklischen Versetzung der $n-1$, der $n-2$, der $n-3$, u. s. w., endlich der beyden ersten Wurzeln entspringen, oder, welches das nämliche ist, daß $p^{(n-3)}$ die Summe aller der $1 . 2 . 3 . 4 \ldots n-1$ Formenwerthe von K sey, welche aus den sämmtlichen Versetzungen der $n-1$ ersten Wurzeln entspringen.

10) Um daher den Coefficienten $p^{(n-3)}$ zu finden, muß man vor allem den Ausdruck für K in 8

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \ldots + \alpha^{n-2} x^{(n)})^n$$

nach Potenzen von α entwickeln. Diese Entwickelung wird alsdann, da $\alpha^n = 1$, $\alpha^{n+1} = \alpha$, $\alpha^{n+2} = \alpha^2$, rc. folgende Form erhalten:

$$\xi' + \xi''\alpha + \xi'''\alpha^2 + \xi^{IV}\alpha^3 + \ldots + \xi^{(n)}\alpha^{n-1}$$

worin ξ', ξ'', ξ''', ... $\xi^{(n)}$ gewisse Funktionen von x', x'', x''', ... $x^{(n)}$ seyn werden. Versetzt man nun hierin die Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(n-1)}$ auf alle mögliche Arten, indem man $x^{(n)}$ an seiner Stelle läßt, und addirt hierauf die Resultate zusammen, so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$\zeta' + \zeta''\alpha + \zeta'''\alpha^2 + \zeta^{iv}\alpha^3 + \ldots + \zeta^{(n)}\alpha^{(n-1)}$$

welcher, da er der Werth von $p^{(n-3)}$ ist, in Hinsicht auf die Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(n)}$ nothwendig symmetrisch seyn, und sich daher durch die Coefficienten A, B, C, ꝛc. der gegebenen Gleichung rational ausdrücken lassen wird.

11) Um die Coefficienten $q^{(n-3)}$ der letzten Gleichung in 5 zu finden, mache man in dem Ausdrucke $\xi' + \xi''\alpha + \xi'''\alpha^2 + \ldots + \xi^{(n)}\alpha^{(n-1)}$ die $n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots 3$ cyklischen Versetzungen der $n-1$ ersten, der $n-2$ ersten, der $n-3$ ersten u. s. w. Wurzeln, die der beyden ersten ausgeschlossen; vertausche hierauf x' mit x'' und mache wieder die nämlichen Versetzungen. Multiplicirt man nun die Summe der $n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots 3$ ersten Resultate mit der Summe der $n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots 3$ letzten, so erhält man eine symmetrische Funktion von x', x'', x''', ... $x^{(n)}$, welche durch die Coefficienten A, B, C, ꝛc. ausgedrückt, den Werth von $q^{(n-3)}$ geben wird.

12) Schreiben wir die reducirten Gleichungen in 5 rückwärts, so haben wir nachstehende Folge:

$$(p^{(n-4)})^2 - p^{(n-3)}(p^{(n-4)}) + q^{(n-3)} = 0$$
$$(p^{(n-5)})^3 - p^{(n-4)}(p^{(n-5)})^2 + q^{(n-4)}(p^{(n-5)}) - r^{(n-4)} = 0$$
$$(p^{(n-6)})^4 - p^{(n-5)}(p^{(n-6)})^3 + q^{(n-5)}(p^{(n-6)})^2 - r^{(n-5)}p^{(n-6)} + s^{(n-5)} = 0$$

. . . .

$$K^{n-1} - pK^{n-2} + qK^{n-3} - rK^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$t^n - K = 0$$

Haben wir nun nach 10 und 11 die Coefficienten $p^{(n-3)}, q^{(n-3)}$ gefunden, so giebt die Auflösung der ersten Gleichung den Coefficienten $p^{(n-4)}$ der zweyten Gleichung; und nach dem vorigen Capitel lassen sich hieraus die Werthe von $q^{(n-4)}$ und $r^{(n-4)}$, unmittelbar durch rationale Ausdrücke bestimmen, weil $p^{(n-4)}$, $q^{(n-4)}$ und $r^{(n-4)}$, gleichartige Funktionen sind. Die Coefficienten der zweyten Gleichung sind also völlig bestimmt, und die Auflösung derselben giebt den Coefficienten $p^{(n-5)}$ der dritten Gleichung; mithin auch, wie vorher die Coefficienten $q^{(n-5)}$, $r^{(n-5)}$, $s^{(n-5)}$; und die Auflösung dieser Gleichung giebt wieder den Coefficienten $p^{(n-6)}$ der folgenden Gleichung. Fährt man auf diese Art fort, so findet man endlich die Coefficienten p, q, r, 2c. der Gleichung für K.

13) Es seyen K', K'', K''', K^{IV} . . . . $K^{(n-1)}$, die $n-1$ Wurzeln dieser Gleichung; ihnen entsprechen, wie wir in 2 angenommen haben, diejenigen Formenwerthe von $K = f' : (1234 \ldots n)$, welche aus der cyklischen Versetzung der $n-1$ ersten Wurzeln entspringen. Jeder dieser Werthe von K in der Gleichung $t^n - K = 0$ substituirt, giebt n Werthe für t, also geben alle zusammen $n \cdot n-1$ Werthe für t; und diese sind:

$$\sqrt[n]{K'},\ \alpha\sqrt[n]{K'},\ \alpha^2\sqrt[n]{K'},\ \ldots\ldots\ \alpha^{n-1}\sqrt[n]{K'}$$

$$\sqrt[n]{K''},\ \alpha\sqrt[n]{K''},\ \alpha^2\sqrt[n]{K''},\ \ldots\ldots\ \alpha^{n-1}\sqrt[n]{K''}$$

$$\sqrt[n]{K'''},\ \alpha\sqrt[n]{K'''},\ \alpha^2\sqrt[n]{K'''},\ \ldots\ldots\ \alpha^{n-1}\sqrt[n]{K'''}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt[n]{K^{(n-1)}},\ \alpha\sqrt[n]{K^{(n-1)}},\ \alpha^2\sqrt[n]{K^{(n-1)}}\ \ldots\ldots\ \alpha^{n-1}\sqrt[n]{K^{(n-1)}}$$

und diesen entsprechen die $n \cdot n-1$ Formenwerthe von $t = f : (1234 \ldots\ldots n)$, welche aus der cyklischen Versetzung aller n Wurzeln und der $n-1$ ersten entspringen.

Diese Zahlenwerthe der Funktion t haben gegen die Formenwerthe von f:(1234.....n) eine solche Beziehung, daß wenn $f:(1234....n) = \alpha^{\nu}\sqrt[n]{K'}$ gesetzt wird, die übrigen $n-2$ Formenwerthe, welche aus f:(1234....n) durch die cyklische Versetzung der $n-1$ ersten Wurzeln entspringen, den Zahlenwerthen $\alpha^{\nu}\sqrt[n]{K''}$, $\alpha^{\nu}\sqrt[n]{K'''}$, $\alpha^{\nu}\sqrt[n]{K^{IV}}$, ... $\alpha^{\nu}\sqrt[n]{K^{(n-1)}}$ entsprechen werden. Da wir nun angenommen haben, daß $t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \ldots + \alpha^{n-1}x^{(n)}$, so haben wir folgende n Gleichungen:

$$x' + x'' + x''' + \ldots + x^{(n-1)} + x^{(n)} = A$$
$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots + \alpha^{n-2}x^{(n-1)} + \alpha^{n-1}x^{(n)} = \alpha^{\nu}\sqrt[n]{K'}$$
$$x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x^{IV} + \ldots + \alpha^{n-2}x' + \alpha^{n-1}x^{(n)} = \alpha^{\nu}\sqrt[n]{K''}$$
$$x''' + \alpha x^{IV} + \alpha^2 x^{V} + \ldots + \alpha^{n-2}x'' + \alpha^{n-2}x^{(n)} = \alpha^{\nu}\sqrt[n]{K'''}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(n-1)} + \alpha x' + \alpha^2 x'' + \ldots + \alpha^{n-2}x^{(n-2)} + \alpha^{n-1}x^{(n)} = \alpha^{\nu}\sqrt[n]{K^{(n-1)}}$$

14) Multiplicirt man die $n-1$ letzten Gleichungen mit α, und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man nach der Division mit n

$$x^{(n)} = \frac{A}{n} + \frac{\alpha^{\nu+1}}{n}\left(\sqrt[n]{K'} + \sqrt[n]{K''} + \sqrt[n]{K'''} + \ldots + \sqrt[n]{K^{(n-1)}}\right)$$

und die übrigen Wurzeln werden sämmtlich von der Form

$$aA + b\sqrt[n]{K'} + c\sqrt[n]{K''} + d\sqrt[n]{K'''} + \ldots + l\sqrt[n]{K^{(n-1)}}$$

seyn, wo a, b, c, d, ... l, gewisse Funktionen von α bezeichnen. Da aber diese Wurzeln immer die nämlichen bleiben müssen, was für eine primitive Wurzel man auch für α setzen mag, so müßte sich unter den übrigen Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(n-1)}$ wenigstens noch eine finden, welche die Form der Wurzel $x^{(n)}$ hat; und da dieses nicht Statt haben kann, so muß aus dem gefundenen Werthe von $x^{(n)}$ das α gänzlich weg-

wegfallen, und daher $\alpha^{\nu+1} = \alpha^n = 1$, mithin $\nu = n - 1$ seyn. Es ist demnach

$$x = \frac{A}{n} + \frac{1}{n}(\sqrt[n]{K'} + \sqrt[n]{K''} + \sqrt[n]{K'''} + \ldots + \sqrt[n]{K^{(n-1)}})$$

eine Wurzel der gegebenen Gleichung, und die übrigen lassen sich aus den Gleichungen in 13 bestimmen, wenn man in denselben $n - 1$ für ν setzt.

Anmerk. Die Auflösung, welche ich hier gegeben habe, hat nur den einzigen Fehler, daß man dadurch nicht alle Wurzeln auf einmal erhält, sondern nur eine, und die übrigen erst durch eine beschwerliche Elimination suchen muß. Ich will daher noch eine andere Auflösung geben, welche diesen Fehler nicht hat, und jener vielleicht auch noch in anderen Rücksichten vorzuziehen seyn möchte. Ich werde, der Deutlichkeit wegen, mit der Gleichung des fünften Grades den Anfang machen.

§ 166.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des fünften Grades

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

so aufzulösen, daß man alle Wurzeln auf einmal erhält.

Aufl. 1) Es sey, wie im Vorhergehenden, $t^5 - K = 0$ die Gleichung für die cyklische Periode aller Wurzeln der Funktion

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^V$$

so ist

$$K = t^5 = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^V)^5$$

oder auch

$$K = (\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + x^V)^5$$

und es kann, wie wir gesehen haben, K keine andere ungleiche Formenwerthe haben, als diejenigen, welche aus den 24 Versetzungen der vier ersten Wurzeln entspringen.

2) So weit ist noch alles, wie bey der vor. Auflösung. Anstatt aber nun ferner, wie bisher, die Gleichung

$$K^4 - pK^3 + qK^2 - rK + s = 0$$

aus der cyklischen Periode der vier ersten Wurzeln zu bilden, will ich jetzt annehmen, daß sie die folgenden vier Formenwerthe:

$$(\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + x^V)^5$$
$$(\alpha^2 x' + \alpha^4 x'' + \alpha x''' + \alpha^3 x^{IV} + x^V)^5$$
$$(\alpha^3 x' + \alpha x'' + \alpha^4 x''' + \alpha^2 x^{IV} + x^V)^5$$
$$(\alpha^4 x' + \alpha^3 x'' + \alpha^2 x''' + \alpha x^{IV} + x^V)^5$$

zu Wurzeln habe, von welchen die drey letzteren aus dem ersteren erhalten werden, wenn man in diesem successive α^2, α^3, α^4 für α setzt.

3) In diesen vier Werthen von K ist x^{IV} immer mit einer andern Potenz von α verbunden, und es lassen sich daher die sämmtlichen 24 ungleichen Werthe von K aus diesen durch eine bloße Permutation der Wurzeln x', x'', x''', ableiten. Läßt man nämlich die Wurzeln x^{IV}, x^V, an ihren Stellen, und permutirt bloß die drey ersten Wurzeln, so giebt jeder der vier obigen Formenwerthe fünf neue, und folglich geben alle zusammen die 24 Werthe von K.

4) Da die Coefficienten p, q, r, s, symmetrische Funktionen der vier gedachten Werthe von K sind, so können diese Funktionen, weder durch die cyklische Versetzung aller Wurzeln, noch durch die Vertauschung von α mit α^2, α^3, α^4, eine Aenderung leiden; und sie können daher nicht mehr ungleiche Werthe erhalten, als diejenigen, welche aus der ausschließlichen Versetzung der drey ersten Wurzeln x', x'', x''', ntspringen. Es hängen also diese Funktionen nur noch von Gleichungen des sechsten Grades ab.

5) Setzen wir daher $p = f:(12345)$, so sind $f:(12345)$, $f:(23145)$, $f:(31245)$, $f:(21345)$, $f:(13245)$, $f:(32145)$, die sechs Formenwerthe von p. Nehmen wir nun an, daß die drey Formenwerthe $f:(12345)$, $f:(23145)$, $f:(31245)$, welche aus der cyklischen Versetzung der drey ersten Wurzeln entstehen, durch die Gleichung

$$p^3 - p'p^2 + p'p - r' = 0$$

gegeben seyn, so sind die Coefficienten p', q', r', solche Funktionen von x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, welche nur noch den einzigen Werth, welchen die Vertauschung von x' mit x'' giebt, haben können. Es hat also p' (und das nämliche gilt auch von q' und r') nicht mehr ungleiche Formenwerthe, als die beyden f': (12345), f': (21345). Es hängt also p' nur noch von einer Gleichung des zweyten Grades ab.

6) Es sey

$$p'^2 - p''p' + q'' = 0$$

diese Gleichung; alsdann sind p'', q'', symmetrische Funktionen von x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, und lassen sich daher durch die Coefficienten A, B, C, D, E, der gegebenen Gleichung rational ausdrücken.

7) Man hat nunmehr nachstehende drey Gleichungen:

$$K^4 - qK^3 + qK^2 - rK + s = 0$$
$$p^3 - p'p^2 + q'p - r' = 0$$
$$p'^2 - p''p' + r'' = 0$$

Die letzte giebt den Werth von p', woraus sich nach dem vorigen Capitel die Coefficienten q', r', bestimmen lassen. Die Auflösung der zweyten Gleichung giebt alsdann ferner den Coefficienten p; und aus diesem lassen sich wieder die Coefficienten q, r, s, finden. Löst man nun die erste Gleichung auf, so erhält man vier Werthe für K.

8) Es seyen K', K'', K''', K^{IV}, diese vier Werthe, so hat man folgende vier Gleichungen (2):

$$(\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + x^{V})^5 = K'$$
$$(\alpha^2 x' + \alpha^4 x'' + \alpha x''' + \alpha^3 x^{IV} + x^{V})^5 = K''$$
$$(\alpha^3 x' + \alpha x'' + \alpha^4 x''' + \alpha^2 x^{IV} + x^{V})^5 = K'''$$
$$(\alpha^4 x' + \alpha^3 x'' + \alpha^2 x''' + \alpha x^{IV} + x^{V})^5 = K^{IV}$$

Ziehet man aus den beyden Theilen dieser Gleichungen die fünften Wurzeln, so hat man, wenn die Gleichung $x' + x'' + x''' + x^{IV} + x^{V} = A$ mit zugezogen wird,

$$x' + x'' + x''' + x^{IV} + x^{V} = A$$
$$\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \alpha^4 x^{IV} + x^{V} = \sqrt[5]{K'}$$
$$\alpha^2 x' + \alpha^4 x'' + \alpha x''' + \alpha^3 x^{IV} + x^{V} = \sqrt[5]{K''}$$
$$\alpha^3 x' + \alpha x'' + \alpha^4 x''' + \alpha^2 x^{IV} + x^{V} = \sqrt[5]{K'''}$$
$$\alpha^4 x' + \alpha^3 x'' + \alpha^2 x''' + \alpha x^{IV} + x^{V} = \sqrt[5]{K^{IV}}$$

9) Addirt man diese Gleichungen zusammen, so erhält man, da $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = [1] = 0$

$$5x^{V} = A + \sqrt[5]{K'} + \sqrt[5]{K''} + \sqrt[5]{K'''} + \sqrt[5]{K^{IV}}$$

Multiplicirt man die zweyte mit α^4, die dritte mit α^3, die vierte mit α^2, die fünfte mit α, und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man

$$5x' = A + \alpha^4 \sqrt[5]{K'} + \alpha^3 \sqrt[5]{K''} + \alpha^2 \sqrt[5]{K'''} + \alpha \sqrt[5]{x^{IV}}$$

Multiplicirt man die zweyte mit α^3, die dritte mit α, die vierte mit α^4, die fünfte mit α^2, und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man

$$5x'' = A + \alpha^3 \sqrt[5]{K'} + \alpha \sqrt[5]{K''} + \alpha^4 \sqrt[5]{K'''} + \alpha^2 \sqrt[5]{K^{IV}}$$

Multiplicirt man die zweyte mit α^2, die dritte mit α^4, die vierte mit α, die fünfte mit α^3, und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man

$$5x''' = A + \alpha^2 \sqrt[5]{K'} + \alpha^4 \sqrt[5]{K''} + \alpha \sqrt[5]{K'''} + \alpha^3 \sqrt[5]{K^{IV}}$$

Multiplicirt man endlich die zweyte mit α, die dritte mit α^2, die virrte mit α^3, die fünfte mit α^4, und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man

$$5x^{IV} = A + \alpha \sqrt[5]{K'} + \alpha^2 \sqrt[5]{K''} + \alpha^3 \sqrt[5]{K'''} + \alpha^4 \sqrt[5]{K^{IV}}$$

10) Betrachtet man die Werthe der Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, wie sie hier gefunden worden, so wird man sogleich bemerken, daß, wenn man in einer der vier letzten, welche es auch seyn mag, successive α^2, α^3, α^4, α^5, für α setzt, man immer die übrigen vier erhält. Es lassen sich daher die sämmt-

lichen Wurzeln der gegebenen Gleichung in folgenden Ausdruck zusammen fassen:

$$x = \frac{1}{5}\left(A + \alpha\sqrt[5]{K'} + \alpha^2\sqrt[5]{K''} + \alpha^3\sqrt[5]{K'''} + \alpha^4\sqrt[5]{K^{IV}}\right)$$

wenn man sich unter α eine jede Wurzel der Gleichung $x^5 - 1$ denkt.

11) Uebrigens will ich nur noch bemerken, daß bey dieser Auflösung die Wurzel α schon aus den Coefficienten p, q, r, s, verschwinden muß. Denn da die Funktionen K', K'', K''', K^{IV}, in 8 so beschaffen sind, daß sie bey der Vertauschung von α mit α^2, α^3, α^4, d. h. mit den übrigen Wurzeln β, γ, δ der Gleichung $x^5 - 1 = 0$, in einander übergehen, so müssen die Coefficienten p, q, r, s, als symmetrische Funktionen von K', K'', K''', K^{IV}, bey dieser Vertauschung ebenfalls unverändert bleiben, und folglich symmetrische Funktionen von α, β, γ, δ, seyn; mithin, nach dem fünften Capitel, rational werden.

§ 167.

Aufg. Die allgemeine Gleichung des unbestimmten nten Grades

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

so aufzulösen, daß man alle Wurzeln auf einmal erhält, jedoch unter der Voraussetzung, daß n eine Primzahl sey.

Aufl. 1) Es sey, wie in § 165,

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' \ldots + \alpha^{n-1} x^{(n)})$$

also

$$K = t^n = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots + \alpha^{n-1} x^{(n)})^n$$

oder, welches das Nämliche ist,

$$K = (\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \ldots + \alpha^{n-1} x^{(n-1)} + x^{(n)})^n$$

Die Funktion K ist alsdann, wie wir daselbst gesehen haben, so beschaffen, daß sie bey den cyklischen Versetzungen aller Wurzeln x', x'', x''', ... $x^{(n)}$ ungeändert bleibt, und folglich nicht mehr ungleiche Werthe haben kann, als diejenigen, welche aus der Versetzung der $n - 1$ ersten Wurzeln entspringen.

2) Um die 1.2.3.... n−1 Formenwerthe der Funktion K zu finden, welche aus der Versetzung der n−1 ersten Wurzeln entspringen, substituire man zuerst $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots \alpha^{n-1}$ für α; hierdurch entstehen folgende n−1 Werthe:

$$(\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \ldots + \alpha^{n-1} x^{(n-1)} + x^{(n)})^n$$
$$(\alpha^2 x' + \alpha^4 x'' + \alpha^6 x''' + \ldots + \alpha^{n-2} x^{(n-1)} + x^{(n)})^n$$
$$(\alpha^3 x' + \alpha^6 x'' + \alpha^9 x''' + \ldots + \alpha^{n-3} x^{(n-1)} + x^{(n)})^n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\alpha^{n-1} x' + \alpha^{n-2} x'' + \alpha^{n-3} x''' + \ldots + \alpha x^{(n-1)} + x^{(n)})^n$$

Da in allen diesen Formenwerthen, weil n eine Primzahl ist, dieselben Potenzen von α vorkommen, und in jedem die Wurzel $x^{(n-1)}$ mit einer andern Potenz von α verbunden ist, so ist klar, daß man die sämmtlichen Werthe von K erhält, wenn man in diesen n−1 Werthen, die Wurzeln $x', x'', x''', \ldots \ldots x^{(n-2)}$, auf alle Weise permutirt, die Wurzel $x^{(n-1)}$ aber an ihrer Stelle läßt. Jeder dieser Werthe giebt alsdann (ihn selbst mitgerechnet) 1.2.3.... n−2 Werthe, und folglich alle zusammen, die sämmtlichen 1.2.3.... n−1 gedachten Werthe von K.

3) Nehmen wir nun an, daß die n−1 Werthe in 2 die Wurzeln der Gleichung

$$K^{n-1} - pK^{n-2} + qK^{n-3} - rK^{n-4} + \text{zc.} = 0$$

seyen, so muß, nach dem fünften Capitel, die Wurzel α aus den Coefficienten p, q, r, zc. verschwinden, und sie bleiben daher bey der Vertauschung von α mit $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots \alpha^{n-1}$ ungeändert. Hieraus folgt aber nothwendig, daß diese Coefficienten nicht mehr ungleiche Werthe haben werden, als die, welche aus der Versetzung der n−2 Wurzeln $x', x'', x''', \ldots x^{(n-1)}$ entspringen.

4) Da also die Coefficienten p, q, r, zc. nicht mehr ungleiche Werthe haben, als die, welche aus der Versetzung der n−2 ersten Wurzeln entspringen; so hat es mit denselben eben die Bewandniß, wie mit den eben so bezeichneten Coefficienten in § 165. Es läßt sich nämlich die Gleichung vom 1.2.3..

. n — 2 ten Grade, von welcher der Coefficient p abhängt, urch die Vereinigung derjenigen Werthe desselben, welche aus er cyklischen Versetzung der ersten n—2 Wurzeln entspringen, uf eine Gleichung

$$p^{n-2} - p'p^{n-3} + q'p^{n-4} - r'p^{n-5} \text{ ꝛc. } = 0$$

educiren, deren Coefficienten p', q', r', ꝛc. nur noch von Gleichungen des 1 . 2 . 3 .... n—3 ten Grades abhängen weren. Ferner die Gleichung für p', durch die Vereinigung der Formenwerthe desselben, welche aus der cyklischen Versetzung der ersten n — 3 Wurzeln entspringen, auf eine Gleichung

$$p'^{n-3} - p''p'^{n-4} + q''p'^{n-5} - r''p'^{n-6} + \text{ꝛc.} = 0$$

deren Coefficienten p'', q'', r'', ꝛc. nur von Gleichungen des 1 . 2 . 3 .... n — 4 ten Grades abhängen werden, und so fort, bis man zu einer Gleichung des zweyten Grades kommt.

5) Hat man durch die successive Auflösung aller dieser Gleichungen, und mit Hülfe des vor. Capitels, die Werthe der Coefficienten p, q, r, ꝛc. bestimmt, so giebt die Auflösung der Gleichung $K^{n-1} - pK^{n-2} + \text{ꝛc.} = 0$, n — 1 Werthe für K, die ich durch $K', K'', K''', \ldots . K^{(n-1)}$ bezeichnen will. Diesen Werthen entsprechen die n — 2 Werthe in 2; man hat also folgende n — 1 Gleichungen:

$$(\alpha x' + \alpha^2 x'' + \ldots . + \alpha^{n-1} x^{(n-1)} + x^{(n)})^n = K'$$

$$(\alpha^2 x' + \alpha^4 x'' + \ldots . + \alpha^{n-1} x^{(n-1)} + x^{(n)})^n = K''$$

. . . .

$$(\alpha^{n-1} x' + \alpha^{n-2} x'' + \ldots . + \alpha x^{(n-1)} + x^{(n)})^n = K^{(n-1)}$$

6) Durch die Ausziehung der nten Wurzeln entstehen folgende Gleichungen:

$$x' + x'' + x''' + \ldots . + x^{(n)} = A$$

$$\alpha x' + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x''' + \ldots . + x^{(n)} = \sqrt[n]{K'}$$

$$\alpha^2 x' + \alpha^4 x'' + \alpha^6 x''' + \ldots . + x^{(n)} = \sqrt[n]{K''}$$

$$\alpha^3 x' + \alpha^6 x'' + \alpha^9 x''' + \ldots . + x^{(n)} = \sqrt[n]{K'''}$$

. . . .

$$\alpha^{n-1} x' + \alpha^{n-2} x'' + \alpha^{n-3} x''' + \ldots + x^{(n)} = \sqrt[n]{K^{(n-1)}}$$

Multiplicirt man die zweyte Gleichung mit α^{n-1}, die dritte mit α^{n-2}, die vierte mit α^{n-3}, u. s. w., und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man

$$nx' = A + \alpha^{n-1}\sqrt{K'} + \alpha^{n-2}\sqrt{K''} + \ldots + \alpha\sqrt{K^{(n-1)}}$$

Multiplicirt man die zweyte mit α^{n-2}, die dritte mit α^{n-4}, die vierte mit α^{n-6}, u. s. w., und addirt sie hierauf zur ersten, so erhält man

$$nx'' = A + \alpha^{n-2}\sqrt[n]{K'} + \alpha^{n-4}\sqrt[n]{K''} + \ldots + \alpha^2\sqrt[n]{K^{(n-1)}}$$

Auf eine ähnliche Art findet man ferner

$$nx''' = A + \alpha^{n-5}\sqrt[n]{K'} + \alpha^{n-6}\sqrt[n]{K''} + \ldots + \alpha^3\sqrt[n]{K^{(n-1)}}$$

$$nx^{iv} = A + \alpha^{n-4}\sqrt[n]{K'} + \alpha^{n-8}K'' + \ldots + \alpha\sqrt[n]{K^{(n-1)}}$$

rc.

Addirt man endlich alle n Gleichungen zusammen, so erhält man

$$nx^{(n)} = A + \sqrt[n]{K'} + \sqrt[n]{K''} + \ldots + \sqrt[n]{K^{(n-1)}}$$

Man wird leicht sehen, daß man die Werthe von x'', x''', x^{iv}, ... $x^{(n)}$ aus dem Werthe von x' ableiten kann, wenn man darin successive α^2, α^3, α^4, ... $\alpha^n (=1)$ für α substituirt, d. h. wenn man für α alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ setzt. Man hat demnach folgenden allgemeinen Ausdruck für die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x = \frac{1}{n}(A + \alpha\sqrt[n]{K'} + \alpha^2\sqrt[n]{K''} + \ldots + \alpha^{n-1}\sqrt[n]{K^{(n-1)}})$$

Anmerk. Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, so läßt sich zwar diese Methode, aus den in 1. § 136 angeführten Gründen nicht anwenden; aber für diesen Fall werde ich im zweyten Theile eine eigene Methode geben, welche auch noch den Vortheil hat, daß sie weit kürzer ist.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hirsch, Meier,

Sammlung von Beyspielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstaben-Rechnung und Algebra

Bd.: 2,1

Berlin 1809

Math.p. 222 d-2,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082021-4